האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

לכתות י' - יב'

בעיות ופתרונות

פרופ' יוסף גיליס
ד"ר אברהם קריימר

היחידה לפעולות נוער,
מכון ויצמן למדע, רחובות

האולימפיאדה הארצית במתמטיקה

לכתות י' - יב'

בעיות ופתרונות

פרופ' יוסף גילים

ד"ר אברהם קריימר

עריכה: רוחמה אבן

ספרית הוראת המדעים

היחידה לפעולות נוער

מכון ויצמן למדע, רחובות

גרפיקה: קרביץ פולינה

אדר א' - תשמ"ד, פברואר 1984

לקורא,

אנו מגישים בספר זה אוסף בעיות משאלוני האולימפיאדה הארצית לנוער במתמטיקה, מהשנים 1971-1982.

הספר מורכב משלושה חלקים: חלק א' - שאלות המסודרות לפי נושאים.
חלק ב' - רמזים קצרים למיועדים להעלות את הקורא על הדרך לקראת פתרון עצמאי.
חלק ג' - פתרונות מלאים של כל השאלות.

ישנן בעיות שלגביהן ניתנים מספר פתרונות אפשריים. מובן כי גם לאלו כמו גם לאלו ש"זכו" רק לפתרון אחד, יכול תמיד להיות ענין בחיפוש של פתרונות נוספים, לפי גישה שונה.
זאת אנו משאירים לקורא הנבון תוך תקווה שימצא בספר ענין רב.

נשמח לקבל מהפותרים פתרונות נוספים, רעיונות חדשים להכללת שאלות וכו'.

חובה נעימה לנו להביע הערכה לבנק הפועלים בע"מ, ובמיוחד למחלקה לתכניות חסכון לנוער של הבנק, שממנו את האולמפיאדות מהימים הראשונים, וכן לקרן עמוס דה שליט שעזרה להוציא ספר זה לאור.

פרופ' י. גיליס   ד"ר א. קריימר

תוכן עניינים

אברהם קריימר ז"ל נפטר ביולי 1984, כמה ימים לפני שיצא הספר הזה מבית הדפוס ולכן לא זכה לראות בעצמו את פרי עבודתו. מותו בא כמהלומה למשפחתו ולמוקיריו הרבים וכאבידה קשה למערכת החינוך בארץ.

הוא נולד ברוסיה בשנת 1923 וחי בבקו, אזרביג'ן עד עליתו ארצה ב-1977. את רוב לימודיו גמר בבקו בעיקר במתמטיקה ובבעיות הקשורות בהוראת מקצוע זה. בשנת 1955 הוענק לו התואר דוקטור מטעם המכון הפדגוגי של אזרביג'ן ומ-1958 עד 1977 כיהן כפרופסור באותו מוסד.

אברהם עלה ארצה עם אשתו ב-1977 והתישב ברחובות, בה גר כבר בנו המהנדס יוסף קריימר, והצליח מהר מאד להשתלב במערכת החינוך. ואמנם, הצלחתו כמורה למתמטיקה בישראל היתה מרשימה כבר מראשית דרכו בארץ. גם בתקופה הראשונה, כאשר עוד היו לו קשיים בשפה העברית, לא היוו אלה מכשולים. הבנתו במתמטיקה, כשרונו בהוראתה ויחסו האנושי לכל אדם אפשרו לו לעקוף את כל הקשיים וליצור קשר עם התלמידים.

הוא לימד תחילה בבית הספר התיכון "רון" ואח"כ בבית הספר התיכון ע"ש "קציר", שניהם ברחובות. מאז 1978 השתתף בצורה פעילה ביותר גם במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע, במיוחד בכל הקשור בכתיבת ספרי לימוד במתמטיקה לחטיבת הביניים ובהשתלמות מורים למתמטיקה.

פעילות מבורכת נוספת היתה כרוכה בניהול חוגים במכון ויצמן, עבור בני נוער שוחרי מתמטיקה, ובהקשר זה הכין כמה חוברות מצוינות לתועלת התלמידים.

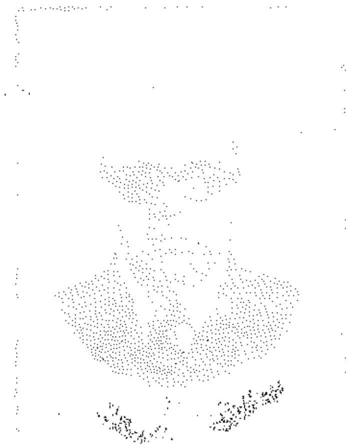
ביולי 1984 יצא עם אשתו לטיול קצר בחו"ל, בכוונה לחזור בעוד מועד לקראת השתלמות מורים למתמטיקה שעמדה להיפתח במכון ויצמן באוגוסט. אבל מיד לאחר הגיעם לחו"ל, לקה בהתקף לב ומת תוך זמן קצר מאד.

מאז הכרתי אותו כיבדתי אותו כאדם, כמתמטיקאי וכמורה. עבדנו יחד תוך שיתוף פעולה הדוק מאד, על ניהול האולימפיאדה הישראלית לנוער במתמטיקה, וגם על הכנת המשתתפים לאולימפיאדה הבינלאומית. הספר הזה גם הוא פרי שיתוף פעולה זה.

יש לציין כי את החלק העיקרי של הספר יש לזקוף לזכותו של ד"ר קריימר שהביא למשימה ידע רחב במתמטיקה, הבנה יפה לצרכי התלמידים וטעם עדין וטוב.

את חלקי הצנוע בספר אני מקדיש לזכרו של אברהם קריימר, ידיד יקר, מתמטיקאי שנון, מורה דגול. הוא יחסר מאד למערכת החינוך ולי אישית ואני מביע את תנחומי לאלמנתו, לבנו ולכל בני משפחתו.

יוסף גיליס



בעיות

תורת המספרים

1. הוכח, כי חזקה שלישית של מספר טבעי m איננה יכולה להיות גדולה ב - 1 מחזקה טבעית של 2, כלומר לא ייתכן $m^3 = 2^n + 1$, בהיות n, m מספרים טבעיים.

2. P(x) הוא רב איבר ממעלה n וידוע כי $P(x) = 2^x$ עבור $x = 1, 2, 3, \ldots, n + 1$. חשב את $P(n + 2)$.

3. המספרים הטבעיים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ שונים זה מזה ואין אף אחד מהם מתחלק במספר ראשוני גדול מ-3. הוכח כי

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 3$$

4. נתון מספר טבעי אשר ספרת היחידות שלו היא 2. יוצרים מספר חדש על-ידי העברת ספרת היחידות 2 מהמקום האחרון למקום הראשון והמספר החדש שמתקבל גדול פי 2 מהמספר המקורי. מהו המספר המקורי?

5. תהי נתונה סדרה כלשהי של חמישה מספרים טבעיים עוקבים. הוכח כי לפחות לאחד מאיברי הסדרה יש התכונה שאין לו גורם משותף עם אף אחד מארבעת חבריו לסדרה.

6. הוכח כי אין מספר טבעי n אשר עבורו הסכום:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n + 1}$$

הוא מספר שלם.

7. a, b, c, d מספרים שלמים. נתון כי:

$a + b + c + d$ מתחלק ב-6 (שש)

הוכח כי גם $a + b^3 - 5c^5 + 7d^7$ מתחלק ב-6 (שש)

8. יהי α מספר טבעי כלשהו ונגדיר $\beta = 10^\alpha - 4$.
הוכח כי $10^\beta - 1$ מתחלק ב- 7.

9. הוכח כי אין למצוא ארבעה מספרים טבעיים k, ℓ, m ו-n המקיימים את השוויון

$$k! + \ell! = m! + n!$$

פרט למקרים הפשוטים $k = m$, $\ell = n$ או $k = n$, $\ell = m$

10. הקבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_{11}\}$ מורכבת מ-11 מספרים שלמים. אותם מספרים מרכיבים גם את הקבוצות $\{b_1, b_2, \dots, b_{11}\}$, $\{c_1, c_2, \dots, c_{11}\}$ ו- $\{d_1, d_2, \dots, d_{11}\}$, אך בסדרים שונים. הוכח כי המכפלה

$$(a_1 + 3b_1 + 5c_1 + 7d_1)(a_2 + 3b_2 + 5c_2 + 7d_2)\dots(a_{11} + 3b_{11} + 5c_{11} + 7d_{11})$$

היא מספר זוגי.

11. לגבי כל מספר טבעי x, הכתוב בשיטה עשורית (עשרונית), נסמן ב- $S(x)$ את סכום הספרות של x [לדוגמה: $S(597) = 5 + 9 + 7 = 21$].
יהיו

$$A = 1977^{5737}$$

$$B = S(A)$$

$$C = S(B)$$

$$D = S(C)$$

הוכח כי $D = 9$.

12. בבסיס ספירה מסויים מהווה המספר המיוצג ע"י 1155 כפולה מדוייקת של המספר המיוצג ע"י 13. מה הם ערכים אפשריים עבור הבסיס?

13. סדר את הספרות 1, 2, 3, 4, 5 כך שהמספר שייוצג לפי בסיס 6:

א. על ידי שתי הספרות הראשונות יתחלק ב- 2.

ב. על ידי שלוש הספרות הראשונות יתחלק ב- 3.

ג. על ידי ארבע הספרות הראשונות יתחלק ב- 4.

ד. על ידי כל חמש הספרות יתחלק ב- 5.

כמה פתרונות קיימים לבעיה זו?

14. נתונים מספר טבעי כלשהו, n, ומספר שלם r הגדול מ-1. נגדיר

$$X = (r^2 - 1)(r^n - 1)$$
$$Y = (r + 1)(r^n - 1)$$

הוכח כי בהצגות של X ו- Y לפי בסיס הספירה r, הספרות של Y זהות עם אלה של X, אך הן מופיעות בסדר הפוך.

משוואות ואישוויונים

15. נתונה המשוואה: $axy + bx + cy + d = 0$ כאשר d, c, b, a מספרים שלמים (לאו דווקא חיוביים) ו $a \neq 0$.

הוכח כי אם קיימים אינסוף פתרונות למשוואה (פתרון הוא זוג x ו y שלמים), אזי bc כפולה של a.

16. המספר המרוכב x הוא אחד הפתרונות של המשוואה הריבועית

$$x^2 + x + 1 = 0$$

הוכח כי

$$x^{1972} + x^{1973} + \frac{1}{x^{1972}} + \frac{1}{x^{1973}} = -2$$

17. מצא את כל המספרים השלמים x, y הפותרים את המשוואה:

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$$

18. הוכח כי כאשר b ו-c הם מספרים אי-זוגיים אזי למשוואה

$$x^2 + 2bx + 2c = 0$$

אין שורשים רציונליים.

19. α הוא שורש ממשי של המשוואה $x^3 + px + q = 0$. הוכח כי $p^2 \geq 4\alpha q$.

20. השרשים c, b, a של המשוואה

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

הם צלעות משולש. הוכח כי שטח המשולש הוא $\frac{1}{4}\sqrt{p(4pq - p^3 - 8r)}$

21. נתון כי c, b, a הם מספרים שלמים וכי $a + b + c = 10$. הוכח כי למשוואה $ax^3 + bx^2 + cx = 9$ אין אף פתרון אחד שלם.

22. פתור את המשוואה

$$\sqrt{7 - \sqrt{7 + x}} = x$$

(הסימן $\sqrt{\ }$ מציין תמיד את השורש הריבועי האי שלילי).

23. פתור את המשוואה

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2x}{x + \sqrt{x}}}$$

24. נתונה המשוואה: $\sqrt{p + x} + \sqrt{p - x} = x$

כאשר p מספר ממשי חיובי ידוע. עבור אילו ערכים של p המשוואה פתירה? פתור אותה.

25. פתור את המשוואה:

$$\sqrt{(x+3) - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{(x+8) - 6\sqrt{x-1}} = 1$$

26. מצא את כל הפתרונות y, x, v, u של מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} u + v = a & (1) \\ xu + yv = b & (2) \\ x^2u + y^2v = c & (3) \\ x^3u + y^3v = d & (4) \end{cases}$$

כאשר d, c, b, a מספרים ממשיים נתונים. ו- $ac - b^2 \neq 0$

27. נתונות המשוואות:

$$|a-b|y+|a-c|z=1$$

$$|b-a|x+|b-c|z=1$$

$$|c-a|x+|c-b|y=1$$

כאשר c, b, a הם מספרים ממשיים ושונים זה מזה.
הוכח כי מבין הנעלמים z, y, x אחד שווה ל 0 ואילו שני האחרים שווים זה לזה.

28. פתור את מערכת המשוואות:

$$\frac{yz}{y+z}=\frac{zx}{z+x}=\frac{xy}{x+y}=a$$

29. מצא את כל הערכים של a, כך שלמערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

יהיה פתרון אחד ויחיד (x ו-y מספרים ממשיים).

30. בשתי קבוצות יחד יותר מ-27 אנשים. אם נוציא 12 איש מקבוצה (ב), מבלי לשנות את קבוצה (א), יהיה מספר אנשי קבוצה (א) גדול מאשר כפליים ממספר אנשי קבוצה (ב).
מאידך, אם נוציא 10 אנשים מקבוצה (א) בלי לשנות את קבוצה (ב), אז יהיה מספר אנשי קבוצה (ב) יותר מפי 9 מאשר מספר אנשי קבוצה (א).

כמה אנשים בכל קבוצה (לפני כל שינוי)?

31. נתונים מספרים לא שליליים c, b, a המקיימים

$$a+b+c=1,$$

הוכח כי

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$$

32. הוכח, כי לגבי כל מספר ממשי x מתקיים אי השויון הכפול

$$-1 < \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$$

33. הוכח כי עבור x, y ו-z ממשיים

$$(y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y)(y-z) \leq 0$$

באילו תנאים יתקיים שוויון?

34. c, b, a הם אורכי צלעות של משולש כלשהו.

הוכח כי:

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

וכי שוויון יתקיים רק כאשר $a = b = c$

35. הוכח את אי-השויון:

$$1 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{4^4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n^n} \leq \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n(n+1)/2}.$$

עבור איזה ערך של n קיים שוויון?

36. נתונים: $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$. הוכח את אי-השוויון:

$$\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2}$$

ושוויון קיים אם ורק אם $a = b$

37. הוכח כי אין למצוא סדרה חשבונית אשר המספרים $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ו-$\sqrt{5}$ ישוו לשלושה איברים כלשהם של סדרה זאת.

38. מצא את כל המספרים הטבעיים w, z, y, x היוצרים סדרה חשבונית ומקיימים $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$.

39. הוכח כי לגבי כל n שלם וגדול מ 1 קיים:

$$\frac{n+2}{n!} + \frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \dots + \frac{n^2-2}{n!} = 3$$

40. A, B ו-C הם שלושה מספרים (לאו דווקא ממשיים), ומגדירים, לגבי כל n טבעי:

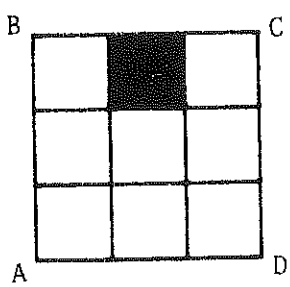
$$S_n = A^n + B^n + C^n$$

נתון כי $S_3 = -3, \quad S_2 = 5, \quad S_1 = 3$

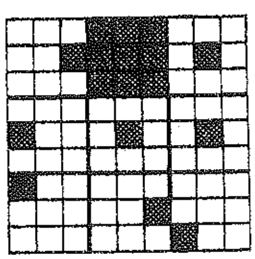
הוכח כי

$$S_n = 3S_{n-1} - 2S_{n-2} - 4S_{n-3} \quad (n = 4,5,6,\dots)$$

41. הריבוע ABCD מחלקים לתשעה ריבועים חלקיים שווים, וצובעים בצבע שחור ריבוע אחד הנבחר באופן שרירותי מבין תשעת הריבועים החלקיים (ראה ציור 1). על כל אחד מתוך שמונת הריבועים האחרים חוזרים ומבצעים פעולה דומה (ראה ציור 2). ממשיכים תהליך זה עד אינסוף. לאיזה ערך מתקרב השטח השחור? (אורך הצלע של הריבוע המקורי הוא 1).



ציור 1


ציור 2

42. הסדרה $\{a_n\}$ מוגדרת כדלקמן:

$$a_1 = \frac{8}{3}$$

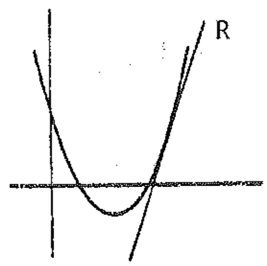
ועבור $n \geq 2$,
$$a_n = \frac{1}{27}\left[8 + 3a_{n-1} + 8\sqrt{1 + 3a_{n-1}}\right]$$

מצא את a_n כפונקציה של n.

פונקציות

43. תהי

$$y = ax^2 + bx + c$$



פרבולה החותכת את ציר ה- x
ויהי R משיק לפרבולה זו.
הוכח, כי לא ייתכן שמשוואת
המשיק R תהיה

$$y = 2ax + b$$

44. הוכח שאי אפשר למצוא מספרים שלמים b, c כך ששורשי הפונקציה הריבועית $3x^2 + bx + c$ יהיו מספרים ממשיים בין 0 ל-1.

45. הישר $y = k$ חותך את הגרף של הפונקציה:

$$y = x^4 - 4x^2 - x + 1$$

בארבע נקודות ממשיות, אשר שיעורי ה- x שלהן הם:

a ,b ,c ,d $(a \leq b \leq c \leq d)$ בהתאמה.

הוכח כי: $a - b - c + d \leq 0$

46. נתון

$$(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^{19} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{76}x^{76}$$

הוכח כי

$$a_{47} + \binom{19}{1}a_{46} + \binom{19}{2}a_{45} + \ldots + \binom{19}{17}a_{30} + \binom{19}{18}a_{29} + a_{28} = 0$$

47. חשב את סכום $(n+1)$ האיברים:

$f(0) + f(1/n) + f(2/n) + f(3/n) + \dots + f(1)$, כשהפונקציה $f(x)$ מוגדרת כדלהלן:

$$f(x) = \frac{a^{2x} + k}{a^{2x} + a}$$

a - מספר חיובי כל שהוא (קבוע);
k - מספר ממשי כל שהוא (קבוע);
x - משתנה ממשי.

48. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לגבי כל x רציונלי, ומקיימת

(1) $f(1) = 2$

(2) $f(xy) = f(x)\,f(y) - f(x+y) + 1$

לגבי כל x ו-y רציונליים.

הוכח כי: $f(x) = x + 1$ (לגבי כל x רציונלי).

קומבינטוריקה

49. במסיבה נפגשו a תלמידים מבית ספר א', b תלמידים מבית ספר ב', ו-c תלמידים מבית ספר ג' ונתון כי $a + b + c = 2P$, מספר זוגי. כמו כן נתון כי $a \le b + c$, $b \le c + a$, $c \le a + b$.
למטרת משחק מסויים רצו לחלק את כל $2P$ התלמידים ל-P זוגות כך שבאף זוג לא יהיו שני תלמידים מאותו בית ספר. הוכח כי מספר הדרכים בהן ניתן הדבר לביצוע הוא

$$\frac{a!b!c!}{(P-a)!(P-b)!(P-c)!}$$

50. מתוך קבוצה של 5 חברי כנסת הרכיבו 16 ועדות בהרכבים שונים (ייתכן שועדה מורכבת מחבר אחד בלבד), והתברר שלכל קבוצה של 3 מבין ועדות אלה היה לפחות חבר אחד משותף.

א) הוכח כי יש חבר המשמש בכל 16 הועדות.

ב) הייתכן שיהיו שני ח"כים שישמשו בכל אחת מהועדות האלה? נמק!

51. נעיין בקבוצת המספרים הטבעיים (כלומר שלמים וחיוביים) בעלי 6 ספרות. נפריד קבוצה זו לשתי קבוצות:

קבוצה (א) תכיל כל מספר (בן 6 ספרות), שאפשר להציגו כמכפלה של שני מספרים תלת-ספרתיים;

קבוצה (ב) מורכבת מכל המספרים הנותרים (כלומר מהמספרים בני 6 ספרות אשר אי אפשר להציג אף אחד מהם כמכפלה של שני מספרים תלת-ספרתיים).

אילו משתי הקבוצות (א) ו-(ב) מכילה יותר איברים? נמק.

[שים לב: הספרה הראשונה (השמאלית) של מספר אינה יכולה להיות 0].

52. תהיינה נתונות n נקודות על היקף עיגול. חבר את כל המיתרים האפשריים בין n הנקודות. מהו המספר המירבי של תחומים שיווצרו בעיגול?

53. נתונים שני ישרים מקבילים a ו-b. כמו כן נתונות m נקודות $P_1, P_2, \ldots, P_m$ על a ו-n נקודות $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ על b. מחברים את כל הקטעים P_iQ_j $(i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$ ונוצרות ע"י כך נקודות חיתוך. חשב את המספר המירבי של נקודות חיתוך אלה.

בעיות שונות

54. ששה ילדים A, B, C, D, E, F, נכנסו למטע ושניים מהם גנבו תפוחים. בחקירתם: -

A אמר כי D ו-E גנבו
B אמר כי C ו-F גנבו
C אמר כי E ו-F גנבו
D אמר כי A ו-E גנבו
ו-E אמר כי B ו-C גנבו

F הצליח לברוח ולא נחקר, מהחמישה שהעידו, ארבעה ספרו כל אחד חצי אמת וחצי שקר, ואילו אחד מהם מסר עדות אשר כולה שקר.

מי היו השניים שגנבו תפוחים?

55. צריח נמצא בפינת לוח שח-מט (8×8) ורצו להעבירו לפינה הנגדית של הלוח (על ידי מהלכי צריח חוקיים בלבד) כך שבדרכו יבקר בכל אחת ממשבצות הלוח פעם אחת ויחידה.

הוכח כי אין הדבר אפשרי.

56. משקל מטבע שאינו מזויף 5 גרם, ומשקל מטבע מזויף 4 גרם.
אם נתון מכשיר שקילה מדויק (לא מאזניים) ונתונים 4 (ארבעה) מטבעות, מצא את משקל כל אחד מהמטבעות בעזרת 3 (שלוש) שקילות בלבד.

57. במועדון 20 חברים. ידוע שבין כל ארבעה חברי המועדון יש לפחות אחד המכיר את שלושת האחרים. (הכוונה בהיכרות היא להיכרות הדדית, כלומר שאם ראובן מכיר את שמעון אזי גם שמעון מכיר את ראובן).

א) הראה שיש לפחות חבר אחד במועדון המכיר את כל 19 החברים האחרים.

ב) מהו המספר הקטן ביותר של חברים מסוג זה, דהיינו חברים המכירים את כל 19 החברים האחרים?

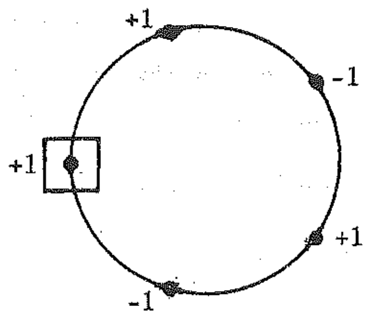
58. בתוך ריבוע אשר אורך צלעו 1, נמצאות $2n^2 + 1$ נקודות.
הוכח כי ניתן לבנות מעגל בעל רדיוס $\frac{1}{n}$, המכיל בפנים לפחות 3 מבין הנקודות.

59. אכר, בנו וחמורם יצאו בשעה 5 בבוקר מכפרם לעיר, המרוחקת 50 ק"מ מהכפר. החמור לא יכול היה להרכיב את שניהם בבת אחת. מהירות הליכת האכר היתה 4 קמ"ש; מהירות הליכת בנו 5 קמ"ש ואילו מהירות החמור, כשאחד מהם רוכב עליו, היתה 10 קמ"ש.

תוכנית התקדמותם היתה כדלהלן:
תחילה רכב האב כאשר הבן צועד אחריו. האב הפסיק לרכב לפי שרירות לבו, קשר את החמור והמשיך לצעוד ברגל. הבן צעד עד הגיעו לחמור, התירו והמשיך לרכב עליו, וחוזר חלילה. (מספר בלתי ידוע של פעמים). בסוף הגיעו שלושתם העירה יחד. באיזו שעה הגיעו?

60. נתונים $n + 1$ מספרים טבעיים, שכל שניים מהם שונים זה מזה וכל אחד מהם קטן מ-$2n$.
הוכח, כי בין $n + 1$ מספרים אלה קיימים שלושה מספרים, כך שהגדול בהם שווה לסכום שני האחרים.

61. מסביב למעגל קובעים n נקודות ונותנים לכל אחת ערך מספרי שהוא +1 או -1.
ל-r מביניהן ניתן הערך +1 ולשאר הערך -1.
(בציור יש לנו $n = 5$, $r = 3$).



נקודה נקראת טובה אם סכום כל סדרה המתחילה בה והולכת לפי כיוון השעון הוא לפחות +1 (הנקודה המסומנת ב- $\boxed{\cdot}$ בציור טובה מאחר שסכומי הסדרות המתחילות בה הן 1, 2, 1, 2, 1 בהתאמה).
הוכח כי בכל מקרה בו $r \geq \frac{1}{2}n$
מספר הנקודות הטובות הוא $2r - n$.

62. נתונה קבוצה של עשרה מספרים טבעיים.
כל קבוצה חלקית של תשעה מהם ניתנת לחלוקה לשלוש קבוצות, כל אחת בת שלושה איברים, כך שלכל אחת משלוש הקבוצות האלה יש אותו סכום.
הוכח כי כל עשרת המספרים שווים זה לזה.

63. על 6 הפיאות של קוביה מסויימת מסומנים מספרים (לאו דוקא שלמים), ונתון שאין כל ששת המספרים שווים זה לזה.
איש אחד לקח את הקוביה ועבר על 6 פיאותיה לפי סדר מסויים שקבע לעצמו.
בכל פיאה, כשהגיע אליה לפי התור, החליף את המספר הכתוב בה בממוצע החשבוני של 4 המספרים הרשומים על 4 הפיאות הסמוכות.
לאחר שטיפל כך בכל 6 הפיאות, נוצרה קוביה עם מערכת מספרים חדשה.
הוא מבצע פעולה זו על הקוביה החדשה ושוב נוצרת קוביה חדשה - וכן הלאה.
הוכח כי ללא קשר למספר הפעמים שיחזור על הפעולה הנ"ל אף פעם לא יקבל קוביה עם מערכת מספרים זהה למערכת המקורית.

64. במדינה מסויימת יש n תחנות רכבת: $T_1, T_2, \ldots, T_n$. לכל זוג תחנות T_i, T_j $(i \neq j)$ מנפיקה ההנהלה שני סוגי כרטיסים: אחד עבור נסיעה מ-T_i ל-T_j ואחד עבור נסיעה מ-T_j ל-T_i.
עקב הרחבת הרשת נוספו m תחנות $(m > 1)$ והדבר הצריך הנפקת 34 סוגי כרטיסים נוספים.
חשב את m ואת n.

65. בלוח של 4×4 משבצות רשום מספר שלם בכל משבצת, וסכום 16 המספרים הוא 32.
הוכח כי אפשר למצוא שורה וטור בלוח כך שסכומם של 7 המספרים הרשומים בשבע המשבצות שבשורה ובטור הללו קטן מ-15.

66. a, b, c הם אורכי הצלעות BC, CA, AB בהתאמה של המשולש ABC. נתון כי עבור כל מספר טבעי n, ניתן לבנות משולש בעל צלעות שאורכיהן a^n, b^n, c^n. הוכח כי המשולש ABC הוא שווה-שוקיים.

67. ידוע כי שלושת התיכונים של משולש כלשהו עוברים דרך נקודה אחת, הקרויה "מרכז הכובד של המשולש".
ABCD הוא מרובע ו-D^*, C^*, B^*, A^* הם מרכזי הכובד של המשולשים ABC, DAB, CDA, BCD בהתאמה. (שים לב: - A^* הוא מרכז הכובד של המשולש המתקבל משלושת קדקדי המרובע פרט ל-A, וכו').
הוכח כי ארבעת הישרים DD^*, CC^*, BB^*, AA^* עוברים דרך נקודה אחת.

68. נתונות חמש נקודות כלשהן במישור. הוכח כי ניתן תמיד לבחור בשלוש מביניהן, נגיד C, B, A כך ש $108° \leq \measuredangle ABC \leq 180°$

69. הוכח כי במערכת צירים ישרה אין קיים משולש שווה צלעות, אשר כל קודקודיו הם נקודות סריג.
(נקודת סריג היא נקודה ששני שעוריה הם מספרים שלמים).

70. דרך שלושת קודקודיו של משולש ABC כלשהו מעבירים שלושה ישרים מקבילים זה לזה, הפוגשים את הצלעות הנגדיות של המשולש (או את המשכיהן) בנקודות A', B', C' בהתאמה.
הוכח כי שטח המשולש A'B'C' הוא כפליים משטח המשולש ABC.

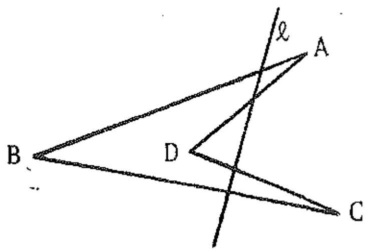
71. קבוצה סופית בת n נקודות נמצאת במישור. נתון, כי שטח משולש שקובעות כל שלוש מהן קטן או שווה ליחידה ריבועית (יחידת שטח). הוכח, כי כל n נקודות הקבוצה "כלואות" במשולש, ששטחו שווה 4 יחידות ריבועיות, ז"א נמצאות בתוכו או על שפתו.

72. על כל אחת מצלעותיו של מעויין בונים ריבוע מחוץ למעויין. הוכח כי מרכזי ארבעת הריבועים האלה הם קודקודיו של ריבוע.

73. נתון מרובע קמור ABCD. שני אלכסוניו, AC ו-BD, נפגשים בנקודה O, כאשר $\sphericalangle AOB = 90°$. OM, OQ, OP ו-ON הם הניצבים מ-O לארבע צלעות המרובע ABCD. הוכח כי הנקודות N, M, Q, P נמצאות על מעגל אחד.

74. נתונים חמישה קטעים (e-ו d, c, b, a), שמכל שלושה מהם ניתן לבנות משולש. הוכח, כי לפחות אחד המשולשים הללו יהיה משולש חד-זויות (שכל זויותיו חדות).

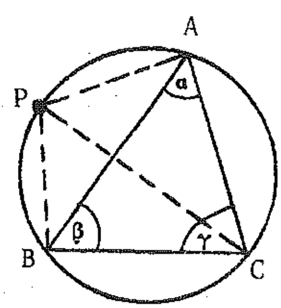
75. הוכח, כי במתושע משוכלל ההפרש בין אורך האלכסון הגדול ביותר לבין אורך האלכסון הקטן ביותר שווה לצלע המתושע.



76. בציור אנו רואים מרובע ABCD,
וישר ℓ החותך את כל ארבע צלעותיו.
האם ניתן לבנות גם מחומש, וישר החותך
את כל חמש צלעותיו? הוכח!

77. נתונות במישור n נקודות $A_1, A_2, \ldots, A_n$ שהמרחק בין כל שתיים מהן אינו גדול מערך מסויים d. כלומר $A_iA_j \le d$ לגבי כל זוג (i, j).
הוכח כי בין $\frac{n(n-1)}{2}$ זוגות הנקודות אין יותר מ-n זוגות המקיימים את השוויון $A_iA_j = d$.

78. לששה עיגולים במישור יש נקודה פנימית משותפת. הוכח כי לפחות אחד העיגולים הוא כזה שמרכזו נמצא בפנים עיגול אחר.

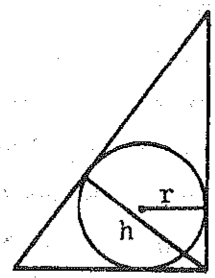


79. נתון משולש ABC בעל
זוויות γ, β, α בהתאמה.
תהי P נקודה כלשהי על
היקפו של המעגל החוסם
את המשולש ABC.

הוכח כי הסכום

$$\overline{AP}^2\sin 2\alpha + \overline{BP}^2\sin 2\beta + \overline{CP}^2\sin 2\gamma$$

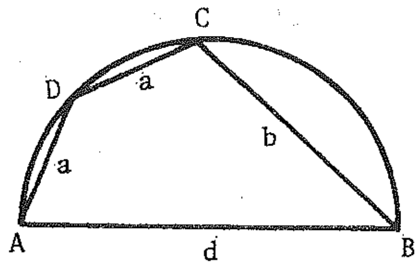
איננו תלוי במקומה של הנקודה P על היקף המעגל.



80. r הוא מחוג המעגל החסום במשולש ישר זווית ABC ו-h הוא הגובה על היתר AB.

הוכח כי

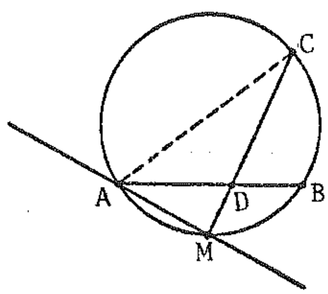
$$\sqrt{2} - 1 \le \frac{r}{h} \le 0.5$$



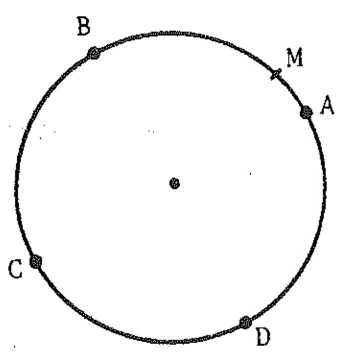
81. $AB = d$ הוא קוטר מעגל (ראה ציור). המיתרים AD, DC שווים זה לזה, $AD = DC = a$; $CB = b$.

הוכח כי:

$$d = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 + 8a^2}\right)$$



82. AB מיתר במעגל (ראה ציור). M אמצע הקשת הקטנה השייכת למיתר זה ו-C נקודה כל שהיא על הקשת השנייה. D נקודת החיתוך של CM ו-AB. הוכח, כי הישר AM משיק למעגל החוסם את המשולש ACD.



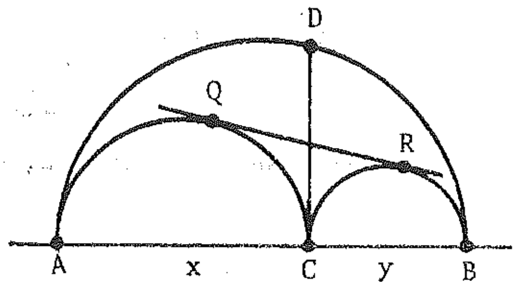
83. A, B, C ו-D ארבע נקודות על מעגל, ומתקיים $AB = BC = CD = DA$. M נקודה כל שהיא על המעגל.

הוכח, כי

$$\overline{AM}^4 + \overline{BM}^4 + \overline{CM}^4 + \overline{DM}^4 = 24R^4,$$

בהיות R מחוג (רדיוס) המעגל.

84. הנקודה C מחלקת את הקטע AB לקטעים $AC = x$, $BC = y$. על כל אחד מהקטעים AB, AC ו-BC בונים חצי מעגל, כולם באותו חצי מישור ביחס לישר AB.
בנקודה C בונים משיק משותף לשני המעגלים הקטנים. משיק זה חותך את המעגל הגדול בנקודה D.



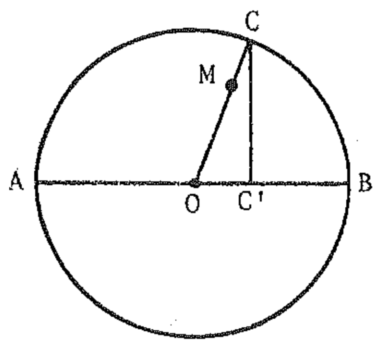
לשני המעגלים הקטנים מעבירים משיק משותף נוסף QR כאשר Q ו-R הן נקודות המגע (ראה ציור).
הוכח כי שטחי המשולשים DQR ו-DAB מקיימים

$$\frac{S_{DQR}}{S_{DAB}} = \frac{xy}{(x+y)^2}$$

85. מעגל חותך 4 ישרים ב-8 נקודות שונות:
את הישר ℓ_1 בנקודות X_1 , X_2; את הישר ℓ_2 ב-Y_1 , Y_2; את הישר ℓ_3 ב-Z_1 , Z_2; ואת הישר ℓ_4 ב-T_1 , T_2. הניצבים לישרים בנקודות X_1 , Y_1 , Z_1 ו-T_1 נפגשים בנקודה אחת.
הוכח כי הניצבים לישרים הנ"ל בנקודות X_2, Y_2, Z_2 ו-T_2, גם הם נפגשים בנקודה אחת.

86. L היא נקודה קבועה כלשהי בפנים מעגל ו-PQ הוא מיתר כלשהו של המעגל כך ש- $\sphericalangle PLQ = 90°$. R הוא האמצע של PQ.
מהו מקומו ההנדסי של R?

87. AB קוטר במעגל נתון O.

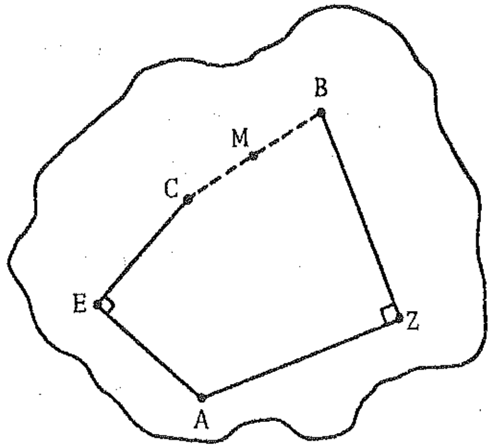


C נקודה כל שהיא על המעגל, ו-C' היטל של C על AB‏($CC' \perp AB$). על המחוג (הרדיוס) OC מקצים קטע OM כך שיתקיים השויון

$$OM = CC' .$$

מהו המקום הגיאומטרי של הנקודה M, כש-C משתנה לאורך המעגל?

88. שודד ים השאיר לחבריו מפה, בלוית המכתב הבא, על מקום המטמון שטמן באי (ראה ציור):



"בקרבת החוף הדרומי תמצא עמוד A.
צעד ממנו בקו ישר לצריף Z.
פנה שמאלה 90° והמשך עד B, כך שיתקיים BZ = ZA.

מ-B חזור ל-A, וצעד מ-A בקו ישר לעץ האלון העתיק, E.
מ-E פנה 90° ימינה והתקדם עד נקודה C, כך שיתקיים CE = EA.

המטמון M, נמצא באמצע הקטע BC".

מטייל שהזדמן לאי, מצא את המפה עם המכתב הנלווה, אך בגישתו לפעול לפי ההוראות, נוכח לדעת כי העמוד נעלם, אם כי הצריף ועץ האלון נמצאו במקומותיהם.

אף על פי כן הצליח המטייל לקבוע בודאות את מקום המטמון.

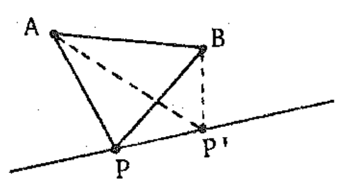
הסבר כיצד מצא את M, ומדוע לא היה לו ספק לגבי נכונות המקום (עוד בטרם התחיל בחפירה).

89. במשולש ABC מצא נקודות N, M על הצלעות AB, AC בהתאמה כך שתתקיימנה הדרישות הבאות:

א) שטח המשולש AMN שווה למחצית שטח המשולש ABC.

ב) אורך הקטע MN יהיה מינימלי. מהו המשולש?

90. הישר ℓ והקטע AB אינם חלים במישור אחד. כיצד תמצא על ℓ נקודה P כך שהסכום PA + PB יהיה קטן ככל האפשר?

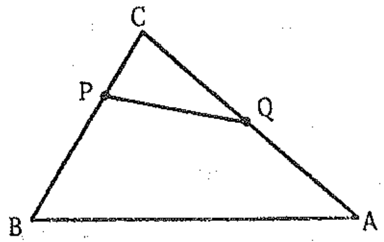


91. נתונים ארבעה קטעים a, b, c, d המקיימים

$a > b > c > d$.

תהי O נקודה נתונה במישור.

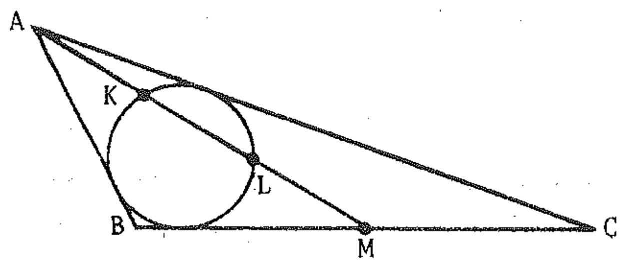
בנה מרובע קמור בעל שטח מירבי (מכסימלי) כך שמרחקי קודקודיו מ-O ישוו ל-a, ל-b, ל-c ול-d בהתאמה. (הערה! סדר הקודקודים נתון לבחירתך).



92. נתון משולש ABC, מצא נקודה P על BC ונקודה Q על AC כך שיתקיים:

$$AQ = PQ = BP$$

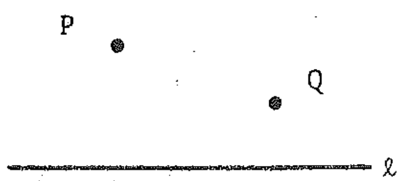
93. נתון מעגל O.



בנה משולש ABC החוסם למעגל, כך שהתיכון AM יתחלק על ידי המעגל (בנקודות חיתוכיהם K ו-L) לשלושה קטעים שווים:

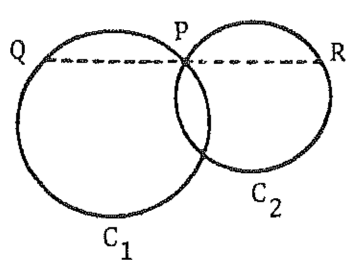
$AK = KL = LM$

94. נתונים ישר ושתי נקודות P ו Q, באותו חצי מישור ביחס לישר זה (ראה ציור).



בנה משולש שצלעו האחת מונחת על הישר הנתון ו P ו Q הן עקבי הגבהים של המשולש על שתי הצלעות האחרות.

95. ABCD הוא מרובע קמור כלשהו. להעביר ישר דרך B המחלק את ABCD לשני חלקים שווי שטח. הוכח את בנייתך.



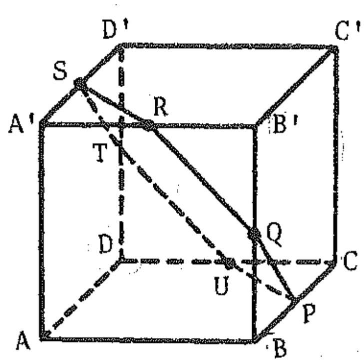
96. P היא אחת מנקודות החיתוך של שני העיגולים C_2, C_1.
לבנות ישר QPR העובר דרך P והפוגש את המעגלים ב-Q ו-R כך ש- $QP = PR$.

97. נתון קטע AB, מימין לקטע יש משטח לא מישורי (ראה ציור). כיצד תוכל לבנות את המשך הישר מימין ל-B (מקווקו) באמצעות עפרון וסרגל בלבד (ללא שימוש במחוגה) כאשר אי אפשר להעביר את הסרגל על המשטח הבלתי מישורי.

98. נתונים כדור, מחוגה, עפרון, סרגל וניר (מישורי).
בנה על הניר את קוטר הכדור (ברשותך לסמן על הניר בעזרת העפרון או המחוגה).

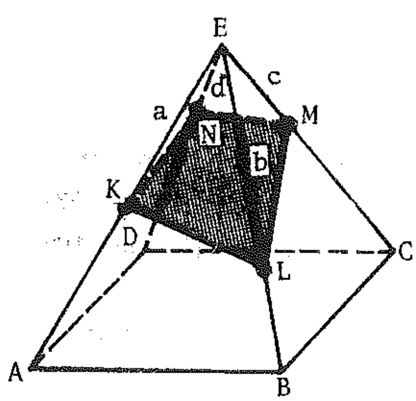
99. D, C, B, A הן ארבע נקודות במרחב שאינן נמצאות במישור אחד. הראה איך לקבוע מישור כך ש-A, B יהיו מצד אחד שלו ו-C, D מצידו השני, וכולן במרחקים שווים ממנו.

100. ABCDA'B'C'D' הוא קוביה ו-P,Q,R,S,T,U הם אמצעי ששת המקצועות שאינם עוברים דרך שני הקודקודים הנגדיים A ו-C'. הוכח כי P,Q,R,S,T,U נמצאות במישור אחד ויוצרות משושה משוכלל.



101. מישור חותך את ארבעת המקצועות הצדדיים של פירמידה ריבועית ישרה, בנקודות K, L, M ו-N בהתאמה.
מרחקי נקודות אילו מראש הפירמידה (ראה ציור) הם: $EN = d$; $EM = c$;
$EL = b$; $EK = a$

הוכח כי: $\frac{1}{d} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$



.102 ABCD טטראדר משוכלל. $AD = a$. דרך נקודה P שעל המקצוע CD (P אינה מתלכדת עם C או D), העבר מישור מקביל ל-AD ול-BC.
מישור זה חותך את הטטראדר.

א) מהי צורת החתך?

ב) הוכח שהיקף החתך אינו תלוי במיקום P על המקצוע CD.

טריגונומטריה

.103 α ו-β הם ערכים שונים של x בתחום $0 < x < \pi$, המקיימים את השוויון

$$a \cos x + b \sin x = c$$

הבע את ערכו של הביטוי

$$4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}$$

באמצעות a, b ו-c.

.104 הוכח, כי

$$\tan \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14}\right) = \frac{1}{2}$$

.105 פתור את המשוואה

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin x \sin y + \sin x + \sin y - 1$$

.106 הוכח כי אין פתרון למשוואה הטריגונומטרית הבאה:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{x}\right) \quad \cos(\pi\sqrt{x - 2}) = 1$$

.107 מצא את המקום ההנדסי של הנקודות במישור אשר שיעוריהן מקיימים את אי השוויון $\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi y \leq 1$.
שרטט (בקווים כלליים) מקום הנדסי זה.

.108 הוכח כי אם $0 < x < \pi$ אזי:

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0$$

109. γ, β, α הן זויות במשולש. הוכח כי

$$\cos\alpha + \sqrt{2}\,(\cos\beta + \cos\gamma) \leq 2$$

וכי השוויון קיים אך ורק כאשר $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \gamma = 45^\circ$.

110. מצא את הערך המינימלי של הפונקציה

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)} + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)}$$

עבור $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{3}$.

111. במשולש ABC נתונים הזוית α והשטח S. מהו הערך המינימלי של הצלע a המונחת מול הזוית α?

רמזים

תורת המספרים

.1 $2^n = m^3 - 1 = (m-1)(m^2+m+1)$

אבל: $m^2 + m + 1$ תמיד אי-זוגי.

.2 הסתכל בפונקציה

$$f(x) = \binom{x-1}{0} + \binom{x-1}{1} + \dots + \binom{x-1}{n}$$

.3 הוכח כי הסכום קטן מ:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)$$

.7 עבור כל x, n טבעיים $x^{2n+1} - x$ מתחלק ב 6.

.11 המספר 1977 מתחלק ב-3 ולכן A מתחלק ב-9. מכאן שגם B, C ו-D יתחלקו ב-9. נשאר להוכיח כי $D = 9$.

.13 הספרות השניה והרביעית הן 2 ו-4. הרביעית לא תוכל להיות 4, לכן היא 2 והשניה 4.

מכאן, המספר הוא: $\overline{a4b2c}$

אבל $b = 3$ והאפשרויות הן: 14325_6 וגם 54321_6.

משוואות ואי שוויונים

.18 עבור c, b, אי-זוגיים, $b^2 - 2c$ אינו יכול להיות ריבוע משוכלל.

.29 לעומת כל פתרון (x, y) קיים גם הפתרון $(-x, y)$. לכן אם יש פתרון יחיד $x = 0$, מכאן $a = 0$ או $a = 2$.

עכשיו יש לבדוק את שתי האפשרויות ומתקבל כי רק $a = 0$ נותן פתרון יחיד.

סדרות

41. בכל שלב מצטמצם השטח <u>הלבן</u> לפי היחס 8/9. אחרי n שלבים יהיה השטח <u>השחור</u> $1 - (8/9)^n$.

פונקציות

43. כדי ש R יהיה משיק צריכים שני פתרונות המשוואה:

$$ax^2 + bx + c = 2ax + b$$

להיות שווים, דהיינו: $(b - 2a)^2 = 4a(c - b)$

וזה סותר את $b^2 - 4ac > 0$.

47. $f(x) + f(1 - x) = a^k$

48. הצב $y = 1$ יתקבל $f(x + 1) = f(x) + 1$. מכאן, בדרך אינדוקציה,:

$$f(n) = n + 1$$

עבור כל n שלם. עכשיו תציב:

$$x = m \quad , \quad y = \frac{n}{m}$$

קומבינטוריקה

49. נסמן ב α את מספר תלמידי א' המסתדרים בזוגות עם תלמידי ב'. אזי $a - \alpha$ מ-א' יסתדרו בזוגות עם ג'. יוצא כי $c - a + \alpha$ מ-ג' יסתדרו בזוגות עם ב' ולכן $\alpha + (c - a + \alpha) = b$, דהיינו: $\alpha = \frac{a + b - c}{2} = p - c$.

51. אין יותר מ-900 מספרים תלת-ספרתיים.

בעיות שונות

56. בשקול $x+y+z$, $x+y+t$, $x+z+t$, $y+z+t$. קל לראות כי כל האפשרויות השונות עבור (x, y, z, t) יובילו למערכות שונות של תוצאות השקילה.

60. יהיו המספרים $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. לשתי הקבוצות .
$\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1\}$ ו- $\{a_1, a_n, \ldots, a_{n+1}\}$ חייב להיות לפחות אחד משותף.

הנדסה

69. אם כל קודקודי משולש ABC הם נקודות סריג, אזי tgA, tgB ו-tgC יהיו כולם רציונליים.

70. ניתן לפשט את הבעיה בעזרת הטלה אורתוגונלית לבעיה יותר פשוטה.

71. התחל ממשולש בעל שטח מירבי.

74. נניח כי $a \le b \le c \le d \le e$. אם:

$$c^2 \ge a^2 + b^2$$
$$d^2 \ge b^2 + c^2$$
$$e^2 \ge c^2 + d^2 \quad \text{ו-}$$

אזי: $e \ge a + b$.

80. שטח המשולש שווה ל- $\frac{1}{2}hc$ וגם ל- $\frac{1}{2}r(a+b+c)$ ולכן:

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+c} = \frac{1}{2}$$

מאידך $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$ ולכן:

$$\frac{r}{h} > \frac{c}{\sqrt{2}c + c} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

83. יהיה $\sphericalangle AOM = \theta$; אזי: $\sphericalangle AOB = \theta + \frac{\pi}{2}$ $\sphericalangle AOC = \theta + \pi$, $\sphericalangle AOD = \theta + \frac{3\pi}{4}$

$$AM = 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

$$CM = 2R\sin\frac{\theta + \pi}{2} = 2R\cos\frac{\theta}{2}$$

$$BM = 2S\sin\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2} = 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})$$

$$DM = 2R\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})$$

ולכן:

$$AM^4 + BM^4 + CM^4 + DM^4 = 16R^4\{\sin^4\frac{\theta}{2} + \cos^4\frac{\theta}{2} + \sin^4(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) + \cos^4(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})\}$$

אבל; עבור כל α

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$$

ולכן:

$$AM^4 + BM^4 + CM^4 + DM^4 = 16R^4\{2 - \frac{1}{2}[\sin^2\theta + \sin^2(\theta + \frac{\pi}{2})]\}$$

84. הוכח כי DQA ו-DRB הם קוים ישרים.

86. בדרך אנליטית ניקח את L בנקודה $(0, 0)$ ומשוואת המעגל

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2$$

כאשר $a < b$. הישרים LQ , LP יהיו $y = \lambda x$, $y = -\frac{x}{\lambda}$ בהתאמה.

88. הוכח כי מקום המטמון איננו תלוי במקום העמוד.

89. מאחר שהשטח S_{AMN} נתון, נובע כי $AM \cdot AN$ נתון. לכן, כדי ש MN יהיה מינימום צריך $AM^2 + AN^2$ להיות קטן ככל האפשר.

90. יהיה α המישור העובר דרך A ו ℓ, ו β המישור דרך B ו ℓ . יהיה γ המישור דרך ℓ החוצה את הזוית בין α ל β . תהיה B' הנקודה הסימטרית ל B ב γ. היא נמצאת על α ו $AP + PB = AP + PB'$.

94. הנקודות P ,Q נמצאות על מעגל אשר קוטרו הוא בסיס המשולש.

96. כצעד ראשון בנה מעגל C_2' הסימטרי ל- C_2 לגבי המרכז P.

97. נצל את התכונות של המרובע השלם.

טריגונומטריה

103. $$a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\beta + b\sin\beta$$

ומכאן: $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a}{b}$$

לכן: $$\frac{1}{a}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{b}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

אבל: $$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left[a\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right] = c$$

104. $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{14}\cos\frac{2r-1}{14}\pi$$

$$= \frac{\sin\frac{r\pi}{7} - \sin\frac{(r-1)\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

106. לא יתכן כי גם $\sqrt{x}$ וגם $\sqrt{x-2}$ יהיו מספרים שלמים.

107. $\sin^2\pi x + \cos^2\pi y \le 1 \iff |\sin\pi y| \le |\sin\pi x|$, ומספיק לעיין במקרה $x \ge 0$, $y \ge 0$.

109. $\cos\beta + \cos\gamma = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta - \gamma}{2}$

ולכן, עבור α נתון יהיה $\cos\beta + \cos\gamma$ מירבי כאשר $\beta = \gamma = \frac{\pi - \alpha}{2}$.
נחפש איפוא את המכסימום של:

$$\cos\alpha + 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} = 1 + 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2} - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

ז.א. $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

110. $$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)} + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)} = \frac{2\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)}{0.5 + \cos 2\alpha}$$

בעוד $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ המכנה גדל עם α ואילו המונה יורד. יוצא כי הערך המירבי הוא כאשר $\alpha = 0$.

111. מאחר ש- $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, יוצא כי bc ידועה. לפי משפט הקוסינוס, נובע שיש לחפש את המינימום של $b^2 + c^2$ כאשר bc נתון.

פתרונות

תורת המספרים

1. נניח כי: $m^3 = 2^n + 1$

מכאן: $m^3 - 1 = 2^n$

(1) $$(m-1)(m^2+m+1) = 2^n$$

אבל $m^2 + m + 1 = m(m+1) + 1$

ולכן הוא אי-זוגי ואינו יכול לחלק את 2^n.

2. <u>פתרון</u>: הפונקציה

$$f(x) = \binom{x-1}{0} + \binom{x-1}{1} + \dots + \binom{x-1}{n}$$

היא רב איבר ממעלה n. מאידך, עבור $1 \le r \le n+1$, קיים

$$f(r) = \binom{r-1}{0} + \binom{r-1}{1} + \dots + \binom{r-1}{r-1}$$

$$= (1+1)^{r-1}$$

$$= 2^{r-1}$$

$$= \frac{1}{2}P(r)$$

נובע כי הפולינום $P(x) - 2f(x)$, אשר גם הוא ממעלה n, מתאפס עבור $r = 1,2,\dots,n+1$. אבל לרב-איבר ממעלה n אין יותר מ-n שורשים, אלא אם כן הוא זהה לאפס. מכאן:

$$P(x) = 2f(x)$$

$$= 2\left[\binom{x-1}{0} + \binom{x-1}{1} + \dots + \binom{x-1}{n}\right]$$

ולכן

$$P(n+2) = 2\left[\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+1}{n}\right]$$

$$= 2\left\{(1+1)^{n+1} - \binom{n+1}{n+1}\right\} = 2(2^{n+1}-1)$$

3. לפי תנאי הבעיה, כל איבר של הסכום $S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ (1)

הוא מהצורה: $\frac{1}{2^{\alpha_i}3^{\beta_i}}$, כאשר α_i ו β_i הם מספרים טבעיים או אפס.

יהיה m המספר הגדול ביותר בין α_i ו β_i. אזי ניתן להציג את המחוברים של הסכום S כמכפלות של איברים מתוך שתי הסדרות ההנדסיות הבאות:

$$1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{2^2} , \dots , \frac{1}{2^m} \qquad (2)$$

$$1 , \frac{1}{3} , \frac{1}{3^2} , \dots , \frac{1}{3^m} \qquad (3)$$

נסמן את סכום איברי הסדרה (2) ב- S_1 ואת סכום איברי הסידרה (3) ב S_2.
איברי הסכום S הם חלק מאיברי המכפלה S_1S_2 ולכן:

$$S \leq S_1S_2 \qquad (4)$$

מנוסחת הסכום של איברי סידרה הנדסית, נקבל:

$$S_1 = \frac{1 - \frac{1}{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$S_2 = \frac{1 - \frac{1}{3^{m+1}}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

מכך ומ-(4) נקבל:

$$S \leq S_1 \cdot S_2 < 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

4. הספרה האחרונה של המספר המבוקש היא 2. הספרה שלפניה צריכה להיות כפולה ממנה, לכן זוהי 4. משיקול דומה נקבל שלפניה יש 8, לפני כן 6, 3 וכו'.
המספר המקורי (הקטן ביותר) הוא: 105263157894736842.

5. אם x הוא גורם משותף של שני מספרים a, b, אזי x מחלק גם את $|a - b|$.
אבל ההפרשים האפשריים בין זוגות מתוך סדרה של 5 מספרים טבעיים עוקבים הם בין 1 ל-4. נובע כי אם לשני מספרים מהקבוצה יש גורם משותף גדול מ-1, אזי שניהם מתחלקים ב-2, או שניהם מתחלקים ב-3, או גם זה וגם זה. יספיק איפוא להוכיח כי לפחות אחד ממספרי הקבוצה איננו מתחלק לא ב-2 וגם לא ב-3. אבל בקבוצה יש לפחות שני איברים אי-זוגיים אשר ההפרש ביניהם 2 ולכן בטוח שאין שניהם כפולות של 3.

6. בין איברי הסכום ישנו שבר אשר מונהו 1 ומכנהו הוא החזקה הגדולה ביותר של המספר 3 (הקטנה מ- $2n + 1$), נאמר 3^{α}.

כדי לחשב את הסכום נמצא מכנה משותף. מכנה זה מכיל את הגורם 3^{α}. מכאן, אם נחבר את השברים הנתונים, נקבל במונה סכום של n מחוברים, אשר $n - 1$ מהם מכילים את הגורם 3, כלומר מתחלקים ב 3, ורק מחובר אחד (שמכנהו היה 3^{α}) איננו מכיל את הגורם 3, כלומר איננו מתחלק ב 3. לכן, המונה של הסכום איננו מתחלק ב 3, ומכאן הסכום איננו מספר שלם (מונהו איננו מתחלק ב 3, אך מכנהו מתחלק ב 3).

7. נרשום את הביטוי:

$$a + b^3 - 5c^5 + 7d^7$$

בצורה הבאה:

$$a + b^3 + c^5 + d^7 - 6c + 6d$$

מכאן ברור שמספיק להוכיח כי:

$$a + b^3 + c^5 + d^7$$

מתחלק ב 6.

אבל, עבור כל n, x טבעיים, $x^{2n+1} - x$ מתחלק ב 6. כי

$$\begin{aligned} x^{2n+1} - x &= x(x^{2n} - 1) \\ &= x(x^2 - 1)(x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + 1) \end{aligned}$$

ולכן מתחלק ב-x, $x-1$ ו $(x+1)$, אבל מבין שלושה אלה, לפחות אחד מתחלק ב-2 ואחד מתחלק ב-3.

יוצא כי

$$a + b^3 + c^5 + d^4 \equiv a + b + c + d \pmod 6 .$$

8. נתון כי $\beta = 10^\alpha - 4$ כאשר α - טבעי. אזי β הוא מספר מהסוג: 6, 96, 996 או 96 ... 99. כלומר, β מתחלק ב 6. נסמן $\beta = 6n$ כאשר n הוא מספר טבעי.

מכאן:

$$10^\beta - 1 = 10^{6n} - 1 = (10^6)^n - 1 \qquad (1)$$

$a^n - 1$ מתחלק ב $a - 1$ לכל n כי:

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1)$$

מ- (1) נקבל:

$$10^\beta - 1 = (10^6)^n - 1 =$$

$$= (10^6 - 1)M = (10^3 + 1)(10^3 - 1)M =$$

$$= 1001 \cdot 999M$$

המספר 1001 מתחלק ב 7, לכן $10^\beta - 1$ מתחלק ב 7.

9. אם קיים פתרון כזה נוכל להניח כי $n > \ell$; $k > m$. במקרה ש- $m > n$ נקבל:

$$\frac{m!}{\ell!} + \frac{n!}{\ell!} - \frac{k!}{\ell!} = 1$$

אבל כל האיברים מצד שמאל הם כפולה של $\ell + 1$. במקרים אחרים ניתן לטפל בצורה דומה.

10. דרך I

נוכיח בדרך השלילה:

ראשית נציין כי b_i, c_i, d_i ו $3b_i$, $5c_i$ ו $7d_i$ הם בהתאמה מספרים בעלי אותן זוגיות.

נניח שהמכפלה היא אי-זוגית. מכאן נובע שכל גורם שלה, כלומר, כל סכום מהצורה: $a_i + 3b_i + 5c_i + 7d_i$, הוא אי-זוגי.

מכאן, כל גורם במכפלה מכיל מספר אי-זוגי של מספרים זוגיים.

סה"כ ישנם 11 גורמים במכפלה ובכל אחד מהם מספר אי-זוגי של מספרים זוגיים. כלומר, סה"כ ישנו מספר אי-זוגי של מספרים זוגיים. אבל מספר המספרים הזוגיים חייב להתחלק ב 4 מכיוון שכל מספר מופיע פעם בכל אחד מהמספרים d, c, b, a. קיבלנו סתירה, ולכן המכפלה זוגית.

דרך II

נגדיר $S = \sum_{i=1}^{11} a_i$

ואז $S = \sum_{i=1}^{11} b_i = \sum_{i=1}^{11} c_i = \sum_{i=1}^{11} d_i$

לכן $$\sum_{i=1}^{11} (a_i+3b_i+5c_i+7d_i) = \sum_{i=1}^{11} a_i + 3\sum_{i=1}^{11} b_i + 5\sum_{i=1}^{11} c_i + 7\sum_{i=1}^{11} d_i = 16S$$

ולכן סכום זה זוגי. אבל הסכום של 11 מחוברים שלמים לא יוכל להיות זוגי אלא אם כן לפחות אחד המחוברים זוגי. לכן גם מכפלתם היא זוגית.

11. $S(1977) = 1 + 9 + 7 + 7 = 24$

24 מתחלק ב 3, לכן 1977 מתחלק ב 3.

מכאן A מתחלק ב 9, ו $B = S(A)$ גם הוא מתחלק ב 9.

נובע כי $C = S(B)$ מתחלק ב 9 וכו'. באופן כזה נקבל מספרים המתחלקים ב 9, כאשר $S(x)$ הקטן ביותר הוא 9.

נשאר להוכיח כי ב- D מגיעים ל $S(x)$ הקטן ביותר בתהליך זה:

כידוע מכפלת שני מספרים בעלי n ו k ספרות בהתאמה הוא מספר בעל $n + k$ או $n + k - 1$ ספרות.

מכאן, למספר A יש לכל היותר $5737 \cdot 4 = 22948$ ספרות.

לכן: $B = S(A) \leq 22948 \cdot 9 = 206{,}532$. כלומר, ל B ישנן לכל היותר 6 ספרות.

מכאן: $C = S(B) < 6 \cdot 9 = 54$, כלומר בעל לא יותר מ- 2 ספרות.

ואז: $D = 9$.

12. נסמן את הבסיס המבוקש ב-g. ברור ש $g \geq 6$.

מנתוני הבעיה נובע כי:

$$1155_g = 13_g \cdot q \qquad (1)$$

ברור ש- $q < g^2$, כי אילו היה q שווה ל- g^2 או גדול ממנו, אזי $13_g \cdot q$ היה שווה ל- 1300_g או גדול ממנו.

נסמן $q = g^2 - n$ ונציב ב- (1). נקבל:

$$g^3 + g^2 + 5g + 5 = (g + 3)(g^2 - n)$$

$$g^3 + g^2 + 5g + 5 = g^3 + 3g^2 - n(g + 3)$$

$$n = \frac{2g^2 - 5g + 5}{g + 3} = 2g - 11 + \frac{28}{g + 3}$$

כדי ש n יהיה מספר שלם, חייב $g + 3$ להיות גורם של 28. כיוון ש $g \geq 6$, יוצא כי $g = 11$ או $g = 25$. מכאן $n = 13$ או $n = 40$ בהתאמה.

קל לבדוק כי $g = 11$ ו $g = 25$, שניהם מקיימים את תנאי הבעיה.

13. שתי הספרות הראשונות מהוות מספר אשר מתחלק ב-2, לכן הספרה השניה היא 2 או 4. שלוש הספרות הראשונות מהוות מספר אשר מתחלק ב 3 ולכן הספרה השלישית יכולה להיות רק 3.

כיון שארבע הספרות הראשונות מהוות מספר אשר מתחלק ב 4, הספרה הרביעית היא 2 או 4.

ארבע הספרות הראשונות אינן a234 שכן 34_6 איננו מתחלק ב 4.

מכאן ארבע הספרות הראשונות הן a432.

לתנאי האחרון ולשאר התנאים הקודמים מתאימים שני מספרים: 14325_6 ו 54321_6.

$$x = (r^2 - 1)(r^n - 1) = r^{n+2} - r^2 - r^n + 1 =$$ .14

$$= \underbrace{(r^{n+2} + 1)}_{A} - \underbrace{(r^n + r^2)}_{B}$$

נציג את A ו B לפי בסיס r

$$\begin{array}{rr} - & A = 1000\ \dots\ 0001_{(r)} \\ & B = \quad 10\ \dots\ 0100_{(r)} \\ \hline \end{array}$$

אזי (1) $$x = A - B = \underbrace{\overline{(r-1)(r-2)(r-1)\dots(r-1)(r-1)01}}_{\text{ספרות } (2+n)}{}_{(r)}$$

כמו כן $$y = (r+1)(r^n - 1) = r^{n+1} - r + r^n - 1 =$$

$$= \underbrace{(r^{n+1} + r^n)}_{C} - \underbrace{(r+1)}_{D}$$

$$\begin{array}{rr} - & C = 1\ 1\ 0\ \dots\ 0\ 0\ 0_{(r)} \\ & D = \qquad\qquad 1\ 1_{(r)} \\ \hline \end{array}$$

$$y = C - D = \underbrace{\overline{1\ 0\ (r)\dots(r-1)(r-2)(r-1)}}_{\text{ספרות } (n+2)}{}_{(r)}$$ (2)

קל לראות בהצגות (1) ו (2) של x ו y .
כי סדר הספרות הפוך בהן.

.15
$$axy + bx + cy + d = 0$$
$$(ay + b)x + (cy + d) = 0$$

כיון ש x יכול לקבל אינסוף ערכים, אזי:

$$\begin{cases} ay + b = 0 \\ cy + d = 0 \end{cases}$$

מכאן:

$$d = \frac{bc}{a}$$

.16 מאחר ש- (1) $x^2 + x + 1 = 0$

יוצא כי: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

ולכן: $x^3 = 1$

מכאן: $x^{1972} = x^{3\cdot 657+1} = 1^{657}x = x$

ואילו: $x^{1973} = x^{3\cdot 657+2} = x^2$

מכאן: $x^{1972} + x^{1973} + \frac{1}{x^{1972}} + \frac{1}{x^{1973}}$

$$= x + x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$= (x + x^2)(1 + \frac{1}{x^3})$$

$$= 2(x + x^2) = -2$$

כי: $x + x^2 = -1$ לפי המשוואה (1).

17. $$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$$

$$4y^2 + 4y = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x$$

$$4y^2 + 4y + 1 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 \qquad (1)$$

$$(2y + 1)^2 = (2x^2 + x)^2 + (3x^2 + 4x + 1) \qquad (2)$$

$3x^2 + 4x + 1 > 0$ כאשר $x > -\frac{1}{3}$ או $x < -1$

מכאן ומ-(2) נובע כי לכל x שלם, פרט ל $x = -1$.

$$(2y + 1)^2 > (2x^2 + x)^2 \qquad (3)$$

נרשום את (1) בצורה אחרת:

$$(2y + 1)^2 = (2x^2 + x + 1)^2 + (2x - x^2) \qquad (4)$$

$2x - x^2 < 0$ כאשר $x < 0$ או $x > 2$ מכאן ומ-(4) נובע כי לכל x שלם פרט ל 0, 1 ו 2:

$$(2y + 1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2 \qquad (5)$$

מ-(3) ו-(5) נובע כי לכל x שלם פרט ל 2, 1, 0, -1 קיים:

$$(2x^2 + x)^2 < (2y + 1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2$$

כלומר $(2y + 1)^2$ נמצאת בין ריבועים של שני מספרים עוקבים $2x^2 + x$ ו $2x^2 + x + 1$. אך זה בלתי אפשרי כי $2y + 1$ מספר שלם.

מכאן נובע כי אם x מספר שלם y יכול להיות שלם רק כאשר $x = -1, 0, 1, 2$. אזי נקבל מהמשוואה הנתונה:

$$y^2 + y = 0 \qquad x = -1 \qquad (6)$$

$$y^2 + y = 0 \qquad x = 0 \qquad (7)$$

$$y^2 + y = 4 \qquad x = 1 \qquad (8)$$

$$y^2 + y = 30 \qquad x = 2 \qquad (9)$$

מכאן מתקבלים הפתרונות הבאים: $(-1, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(2, 5)$, $(2, -6)$.

18. שורשי המשוואה:

$$x^2 + 2bx + 2c = 0$$

הם:

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - 2c}$$

b ו c מספרים איזוגיים.

נניח כי x מספר רציונלי: אזי $b^2 - 2c$ חייב להיות ריבוע של מספר רציונלי.

כלומר:

(1) $b^2 - 2c = t^2$, t מספר רציונלי.

כיון ש b ו c שלמים, t הינו מספר שלם.

$b^2 - 2c$ הוא מספר אי זוגי, לכן גם t הוא מספר אי זוגי.

נסמן $b = 2m + 1$, $c = 2n + 1$ ו $t = 2p + 1$

נציב ב (1) ונקבל:

$$(2m + 1)^2 - 2(2n + 1) = (2p + 1)^2$$

$$4(m^2 + m - n - p^2 - p) = 2$$

אך זה בלתי אפשרי.

כלומר, למשוואה הנ"ל אין שורשים רציונליים.

אפשר גם: מ-(1) נקבל: $b^2 - t^2 = 2c$

$$(b - t)(b + t) = 2c$$

b - t גם b + t הם מספרים זוגיים. מכאן, באגף השמאלי מופיע הגורם 2^2.
אך באגף הימני מופיע רק 2^1, שכן c אי-זוגי. סתירה.

האם תהיה התוצאה נכונה

1) במקרה ש b זוגי?

2) במקרה ש c זוגי?

19. דרך I

לפי משפט וייטה:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad (1)$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p \qquad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -q \qquad (3)$$

כאשר α β ו γ הם שורשי המשוואה.

מ- (1) נקבל: $\beta + \gamma = -\alpha$

מ- (3) נקבל: $\beta\gamma = -\frac{q}{\alpha}$

$$\begin{aligned} \alpha(\beta + \gamma) + \beta\gamma &= p \\ -\alpha^2 - \frac{q}{\alpha} &= p \end{aligned} \qquad (4)$$

מכאן:

$$\begin{aligned} p^2 - 4\alpha q &= (-\alpha^2 - \frac{q}{\alpha})^2 - 4\alpha q \\ &= (\alpha^2 - \frac{q}{\alpha})^2 \end{aligned}$$

(5) $(\alpha^2 - \frac{q}{\alpha})^2 \geq 0$ שכן α ו q הם מספרים ממשיים (אילו q היה מספר שאינו ממשי, אזי לא היה מובן לאי-השוויון $p^2 > 4\alpha q$).

מ-(5) נובע כי: $p \geq 4\alpha q$

דרך II

ברור כי α מקיים את המשוואה:

$$\alpha x^2 + px + q = 0$$

מאחר שלמשוואה זו ישנו פתרון ממשי (דהיינו α), נובע כי $p^2 \geq 4\alpha q$.

20. לפי משפט וייטה:

$$\begin{cases} a + b + c = p \\ ab + ac + bc = q \\ abc = r \end{cases} \qquad (1)$$

לפי משפט הירון נקבל:

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{p(p - 2a)(p - 2b)(p - 2c)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{p(p^3 - 2ap^2 - 2bp^2 + 4abp - 2p^2c + 4apc + 4bpc - 8abc}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{p[p^3 - 2p^2(a + b + c) + 4p(ab + ac + bc) - 8abc]}$$

נשתמש ב-(1) ונקבל:

$$\frac{1}{4}\sqrt{p(4pq - p^3 - 8r)}$$

21. אם: $ax^3 + bx^2 + cx = 9$

כאשר: $a + b + c = 10$

יוצא כי:

$$a(1 - x^3) + b(1 - x^2) + c(1 - x) = 1$$

ז"א $(1 - x)[a(1 + x + x^2) + b(1 + x) + c] = 1$

ולכן: $1 - x$ מחלק 1 ז"א $1 - x = \pm1$.

אם $1 - x = +1$ אזי $x = 0$ ואז $ax^3 + bx^2 + cx = 0$

אם $1 - x = -1$ אזי $x = 2$ ואז $ax^3 + bx^2 + cx$ הוא מספר זוגי.

22. מההסכם על הסימן $\sqrt{\ }$ ותחום הגדרת השורש הריבועי מתקבלת המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 7 + x \geq 0 \\ 7 - \sqrt{7 + x} \geq 0 \end{cases}$$

מכאן: $0 \leq x \leq 42$ (1)

נסמן $y = \sqrt{7 + x}$ ונקבל את המערכת:

$$\begin{cases} \sqrt{7 + x} = y \\ \sqrt{7 - y} = x \end{cases}$$

מכאן:
$$\begin{cases} 7 + x = y^2 \\ 7 - y = x^2 \end{cases}$$

$$x + y = y^2 - x^2$$

או: $x^2 - y^2 + (x + y) = 0$

$$(x + y)(x - y + 1) = 0$$

מכאן: $x - y + 1 = 0$ או $x + y = 0$

נפתור את שתי המערכות המתקבלות:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \sqrt{7 + x} = y \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ \sqrt{7 + x} = y \end{cases} \quad (2)$$

למערכת (2) אין פתרון כיון ש $x \geq 0$ ואז $y \leq 0$ אך זה סותר את המשוואה $\sqrt{7 + x} = y$

נציב $y = x + 1$ במערכת (3).

נקבל במשוואה השניה:

$$\sqrt{7 + x} = x + 1$$

$$7 + x = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$x = -3$ או $x = 2$

$x = -3$ סותר את התנאי ש- $x \geq 0$.

אחרי בדיקה נקבל כי $x = 2$ הוא פתרון של המשוואה הנתונה.

(במקרה זה דרושה בדיקה שכן העלנו את שני אגפי המשוואה בחזקה שניה).

.23 $$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2x}{x + \sqrt{x}}}$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{\frac{2x}{x + \sqrt{x}}} = \sqrt{x - \sqrt{x}}$$

נעלה בריבוע:

$$x + \sqrt{x} - 2\sqrt{2x} + \frac{2x}{x + \sqrt{x}} = x - \sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x} - 2\sqrt{2x} + \frac{2x}{x + \sqrt{x}} = 0$$

כיון ש $x \neq 0$, נוכל לחלק את שני האגפים ב $2\sqrt{x}$.

$$1 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

$$\sqrt{x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

נכפול מונה ומכנה של האגף הימני ב: $\sqrt{2} + 1$:

$$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{2}$$

$$x = 2$$

נבדוק ונראה כי $x = 2$ הוא פתרון של המשוואה.

<u>הערה:</u> הבדיקה נחוצה שכן פעמיים העלינו משוואות בריבוע ולכן יכלו להופיע שורשים מיותרים.

.24 $$\sqrt{p + x} + \sqrt{p - x} = x \qquad (1)$$

מהנתונים נובע כי $p > 0$

תחום ההצבה של המשוואה הוא:

$$\begin{cases} p + x \geq 0 \\ p - x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$x \neq 0$ כי אילו היה $x = 0$, אזי גם $p = 0$ בסתירה לנתונים.
מ (2) נקבל כי:

$$0 < x \leq p \qquad (3)$$

בתחום זה משוואה (1) שקולה למשוואה המתקבלת ממנה על ידי העלאה בריבוע של האגפים:

$$p + x + p - x + 2\sqrt{p^2 - x^2} = x^2$$

$$2\sqrt{p^2 - x^2} = x^2 - 2p \qquad (4)$$

אם $x^2 - 2p < 0$, אזי אין פתרון למשוואה (4).

אם $x^2 - 2p \geq 0$ כלומר $x \geq \sqrt{2p}$ ($x \leq -2p$ איננו קיים כי $x > 0$) (5)
אזי המשוואה (4) שקולה למשוואה המתקבלת ממנה על-ידי העלאה בריבוע של האגפים:

$$4(p^2 - x^2) = x^4 - 4px^2 + 4p^2$$

או: $x^2 = 4(p - 1)$ כי $x \neq 0$

מכאן:

$x = 2\sqrt{p - 1}$ ($x > 0$ כי $x \neq -2\sqrt{p - 1}$)

נבדוק אם $2\sqrt{p - 1}$ מקיים את (3) ו (5) .

ראשית נמצא מתי מתקיים (3) וגם (5).

כלומר מתי $\sqrt{2p} \leq x \leq p$

זה אפשרי כאשר: $\sqrt{2p} \leq p$

כלומר כאשר: $2p \leq p^2$

$$p^2 - 2p \geq 0$$

$p \geq 2$ ($p \leq 0$ סותר את הנתונים)

כלומר $p \geq 2$.

עכשיו נבדוק אם $p \geq 2$ גורר:

$$\sqrt{2p} \leq 2\sqrt{p - 1} \leq p$$

$$p \geq 2$$
$$(p - 2)^2 \geq 0$$
$$p^2 - 4p + 4 \geq 0$$
$$4(p - 1) \leq p^2$$
$$2\sqrt{p - 1} \leq p$$

$$p \geq 2$$
$$2p \geq 4$$
$$4p \geq 2p + 4$$
$$4p - 4 \geq 2p$$
$$2\sqrt{p - 1} \geq \sqrt{2p}$$

מ.ש.ל.

והתשובה: $x = 2\sqrt{p - 1}$ כאשר: $p \geq 2$

25. גרשום את המשוואה בצורה הבאה:

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=1 \qquad (1)$$

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$$

נסמן $\sqrt{x-1}$ ב y ונקבל:

$$|y-2|+|y-3|=1 \qquad (2)$$

נסתכל בשלושה מקרים: $y \le 2$, $2 \le y \le 3$ ו- $y \ge 3$

א) אם $y \le 2$ אזי מ (2) נקבל:

$$2-y+3-y=1 \ , \ -2y=-4 \ , \ y=2$$

כלומר $y=2$ או $\sqrt{x-1}=2$. מכאן $x=5$

ב) אם $2 \le y \le 3$ נקבל מ- (2):

$$y-2+3-y=1$$

מכאן:

$$2 \le y \le 3$$

$$2 \le \sqrt{x-1} \le 3$$

$$5 \le x \le 10$$

ג) אם $y \ge 3$ נקבל מ- (2): $y-2+y-3=1$ או $2y=6$, $y=3$.

מכאן: $x=10$

לכך פתרון המשוואה הנתונה: $5 \le x \le 10$

נשים לב שתחום זה נמצא בתחום ההצבה $\{x \ge 1\}$ של המשוואה הנתונה.

.26
$$ac - b^2 = uv(x - y)^2$$
$$bd - c^2 = xyuv(x - y)^2$$
$$ad - bc = uv(x + y)(x - y)^2$$

ולכן:
$$xy = \frac{bd - c^2}{ac - b^2}$$

$$x + y = \frac{ad - bc}{ac - b^2}$$

מכאן קל לקבל את כל הפתרונות.

.27 נניח: $a > b > c$

אזי נקבל:

$$\begin{cases} (a - b)y + (a - c)z = 1 & (1) \\ (a - b)x + (b - c)z = 1 & (2) \\ (a - c)x + (b - c)y = 1 & (3) \end{cases}$$

נחסר את (2) מ- (1), ואת (3) מ- (2) נקבל:

$$\begin{cases} (a - b)(y + z - x) = 0 \\ (b - c)(z - x - y) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

כיון ש: $a \neq b$ ו $b \neq c$ נקבל מ- (4) כי:

$$\begin{cases} y + z - x = 0 \\ z - x - y = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

מכאן $y = 0$ ו- $z = x$

בדרך דומה אפשר להוכיח את הנדרש עבור כל סדר של a, b ו c .

28. נרשום את המערכת הנתונה בצורה הבאה:

$$\frac{y + z}{zy} = \frac{z + x}{zx} = \frac{x + y}{xy} = a$$

אזי:

$$\begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a \end{cases}$$

אבל:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = (\frac{1}{x} + \frac{1}{z}) + (\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) - \frac{2}{x}$$

ולכן:

$$a = a + a - \frac{2}{x}$$

ז.א. $x = \frac{2}{a}$, כאשר $a \neq 0$

ובאופן דומה $y = z = \frac{2}{a}$.

29. אם (x, y) פתרון של המערכת, אזי גם $(-x, y)$ פתרון שלה. לכן אם יש למערכת פתרון יחיד, אזי $x = -x$, כלומר $x = 0$. מכאן הפתרון הוא מהצורה $(0, y)$.

נציב $x = 0$ במערכת ונקבל:

$$\begin{cases} y = 1 - a \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

מכאן $a = 0$ או $a = 2$, וזהו תנאי הכרחי לכך שלמערכת הנתונה יהיה פתרון יחיד. נבדוק אם התנאי הוא גם תנאי מספיק.

(i) כאשר $a = 0$, המערכת היא:

$$\begin{cases} y = 2^{|x|} + |x| \ (1 - |x|) \\ y^2 = 1 - x^2 \end{cases}$$

מהמשוואה השניה נקבל כי: $|x| = \sqrt{1 - y^2} \leq 1$. מכך ומהמשוואה ראשונה נובע כי $y \geq 1$. מהמשוואה השניה נובע גם כי $y \leq 1$.

מכאן $y = 1$ ואז $x = 0$.

לכן, כאשר $a = 0$, למערכת ישנו פתרון אחד ויחיד $(1; 0)$.

(ii) כאשר $a = 2$ המערכת היא:

$$\begin{cases} y = 2^{|x|} - 2 + |x|\ (1 - |x|) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

קל לבדוק כי למערכת יש יותר מפתרון אחד. לדוגמא: $(0; 1)$ ו $(0; -1)$ הם שני פתרונות מתאימים.

לכן למערכת הנתונה קיים פתרון אחד ויחיד אם ורק אם $a = 0$.

30. נסמן את מספר האנשים בקבוצה (א) ב x ובקבוצה (ב) ב y.
נקבל מערכת האי-שוויונים הבאה:

$$\begin{cases} x + y > 27 & (1) \\ x > 2(y - 12) & (2) \\ y > 9(x - 10) & (3) \end{cases}$$

מ- (1) ו (2) נובע כי: $x > 10$.

מ- (2) ו (3) נובע כי: $x < 12$.

מכאן: $x = 11$

נציב $x = 11$ ב (1) ו (2), ונקבל כי: $16 < y < 17.5$.

כלומר, $y = 17$.

31. נשתמש בקשר בין ממוצע חשבוני לממוצע הנדסי: $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (1)

ונקבל: $\sqrt{4a + 1} = \sqrt{(4a + 1)\cdot 1} \leq \frac{4a + 1 + 1}{2} = 2a + 1$

וכמו כן:

$$\sqrt{4b + 1} \leq 2b + 1 \quad , \quad \sqrt{4c + 1} \leq 2c + 1$$

מכאן:

$$\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1} \leq 2(a + b + c) + 3$$

באי-שוויון (1) קיים שוויון רק כאשר $x = y$.
במקרה שלנו יהיה שוויון כאשר: $4a + 1 = 1$, $4b + 1 = 1$ ו- $4c + 1 = 1$,
כלומר כאשר $a = b = c = 0$. אך זה לא יתכן, שכן $a + b + c = 1$.

לכן: $\sqrt{4a + 1} + \sqrt{4b + 1} + \sqrt{4c + 1} < 5$

32. נרשום את אי השוויון הנתון בצורה שקולה לו:

$$\left| \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right| < 1$$

שני אגפי אי שוויון זה חיוביים, לכן ניתן להעלותם בריבוע:

$$\Leftrightarrow \quad \left|\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}\right|^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2 - 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 1 < 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^4 + 4x^2 + 1 < 4x^4 + 4x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < 4$$

$$A = (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y)(y-z)$$ .33

$$= (xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2\right] \le 0$$

שוויון קיים כאשר $x = y = z$.

.34 נכתוב $\alpha = b + c - a$, $\beta = c + a - b$, $\gamma = a + b - c$.

אזי $c = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $b = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$, $a = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$.

ברור כי $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, $\gamma \ge 0$.

כמו כן, $3abc - a^2(b + c - a) - b^2(c + a - b) - c^2(a + b - c)$

$$= \frac{1}{8}[\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2 - 6\alpha\beta\gamma] > 0$$

לפי משפט הממוצעים.

שוויון יתקיים אם ורק אם $\alpha = \beta = \gamma$, דהיינו $a = b = c$.

.35 <u>דרך I</u>

נשתמש באינדוקציה מתמטית:

עבור $n = 1$, נקבל:

$$1 = \left(\frac{2}{1+1}\right)^{\frac{1\cdot 2}{2}}$$

$$1 = 1$$

עבור $n = 2$, נקבל:

$$1 \cdot \frac{1}{2^2} < \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

נניח כי עבור $n = k > 2$ קיים:

$$\Pi_k = 1 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{4^4} \cdots \frac{1}{k^k} < \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}} \qquad (1)$$

נוכיח כי אי השוויון נכון גם עבור $n = k + 1$:

$$\Pi_{k+1} = \Pi_k \cdot \frac{1}{(k+1)^{k+1}} < \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \frac{1}{(k+1)^{k+1}} =$$

$$= \frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(k+1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}} < \left(\frac{2}{k+2}\right)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

$$\frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(k+1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}} < \left(\frac{2}{k+2}\right)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

כי $\frac{2^{\frac{k}{k+2}}}{k+1} < \frac{2}{k+2}$

כלומר, שוויון קיים רק בעבור $n = 1$.

<u>דרך II</u>

נפעיל את משפט הממוצעים על הקבוצה:

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \ldots, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\}$$

אשר בה מופיע המספר הרציונלי $\frac{1}{r}$ בדיוק r פעמים $(r = 1,2,\ldots,n)$.

מספר האיברים בקבוצה הוא:

$$1 + 2 + \ldots + n$$

דהיינו $\frac{n(n+1)}{2}$. הממוצע החשבוני הוא:

$$\frac{2}{n(n+1)} \sum_{r=1}^{n} r \cdot \frac{1}{r} = \frac{2}{n+1}$$

ואילו הממוצע ההנדסי הוא:

$$\left(1 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^3} \cdots \frac{1}{n^n}\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

והמסקנה מיידית.

$$.36 \qquad \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \le 2\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

כיון ששני אגפי אי השוויון חיוביים, נוכל להעלות אותם בריבוע, ונקבל:

$$1 - a^2 + 1 - b^2 + 2\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \le 4 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \le 1 - ab$$

כיון ש: $\quad 0 \le ab \le 1$

$$1 - a^2 - b^2 + a^2b^2 \le 1 - 2ab + a^2b^2$$

$$(a-b)^2 \ge 0$$

אי-השוויון האחרון נכון עבור כל a ו b. לכן נכון גם אי השוויון הנתון. וכמובן ששוויון קיים אם ורק אם $a = b$.

סדרות

.37 נניח כי $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ו $\sqrt{5}$ הם שלושה איברים כלשהם של סדרה חשבונית, אשר האיבר הראשון שלה הוא a וההפרש d .

יהי:

$$\sqrt{2} = a + n_1 d$$

$$\sqrt{3} = a + n_2 d$$

$$\sqrt{5} = a + n_3 d$$

(n_1, n_2 ו n_3 מספרים טבעיים).

מכאן:

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} = (n_1 - n_2)d$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{5} = (n_2 - n_3)d$$

ו:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3}$$

זוהי סתירה, כי $\frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3}$ הוא מספר רציונלי, אך $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ הוא מספר אי רציונלי (הוכח!).

38. דרך I

נסמן את הסדרה:

$$a - \frac{3}{2}d \ , \ a - \frac{d}{2} \ , \ a + \frac{d}{2} \ , \ a + \frac{3}{2}d$$

אזי מהמשוואה:

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3$$

נקבל:

$$(a - \tfrac{3}{2}d)^3 + (a - \tfrac{d}{2})^3 + (a + \tfrac{d}{2})^3 = (a + \tfrac{3}{2}d)^3$$

ואחרי פישוט:

$$(a - \frac{9d}{2})(a^2 + \frac{3d^2}{4}) = 0$$

מכאן:

$$a = \frac{9d}{2}$$

והסדרה היא:

$$3d \ , \ 4d \ , \ 5d \ , \ 6d$$

ז"א: כל מערכת של מספרים טבעיים הפרופורציונליים ל- {6, 5, 4, 3} .

דרך II

$$(a - d)^3 + a^3 + (a + d)^3 = (a + 2d)^3$$

אזי: $a^3 \equiv d^3 (\mathrm{mod} 3)$

ולכן: $a \equiv d (\mathrm{mod} 3)$, ז.א. $a = d + 3\beta$ כאשר β שלם.

נובע כי $27\beta^3 + (d + 3\beta)^3 + (2d + 3\beta)^3 = 27(d + \beta)^3$

ומכאן: $4d^2 + 11d\beta + 9\beta^2 = 0$

וזה לא יתכן עבור β, d שלמים (פרט למקרה $d = \beta = 0$).

39. <u>דרך I</u> (אינדוקציה מתמטית).

עבור $n = 2$ נקבל:

$$\frac{2+2}{2!} + \frac{2}{2!} = 3$$

נניח כי השוויון נכון עבור $n = k$, כלומר:

$$\frac{k+2}{k!} + \frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \dots + \frac{k^2-2}{k!} = 3$$

צריך להוכיח שהשוויון נכון גם עבור $n = k + 1$, כלומר:

$$\frac{k+3}{(k+1)!} + \frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \dots + \frac{k^2-2}{k!} + \frac{(k+1)^2-2}{(k+1)!} = 3$$

הוכחה:

$$\frac{k+3}{(k+1)!} + \frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \dots + \frac{k^2-2}{k!} + \frac{(k+1)^2-2}{(k+1)!}$$

לפי ההנחה:

$$= 3 - \frac{k+2}{k!} + \frac{k+3}{(k+1)!} + \frac{(k+1)^2-2}{(k+1)!}$$

$$= 3 + \frac{k+3+k^2+2k-1-k^2-3k-2}{(k+1)!}$$

$$= 3$$

מ.ש.ל.

<u>דרך II</u>

נסמן את האגף השמאלי של המשוואה הנתונה ב S_n ונוכיח כי S_n קבוע.
לשם כך מספיק להוכיח כי $S_{n+1} = S_n$, ובאמת:

$$S_{n+1} = \frac{n+3}{(n+1)!} + \frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \dots + \frac{n^2-2}{n!} + \frac{(n+1)^2-2}{(n+1)!}$$

$$= \frac{n+2}{n!} + \frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \frac{n^2-2}{n!} + \frac{n+3}{(n+1)!} + \frac{(n+1)^2-2}{(n+1)!} - \frac{n+2}{n!}$$

$$= S_n + 0 = S_n$$

מכאן

$$S_{n+1} = S_n$$

ולכן, לכל n שלם וגדול מ-1:

$$S_n = S_2 = \frac{4}{2!} + \frac{2}{2!} = 2 + 1 = 3$$

40. מהנתונים נובע כי: $BC + CA + AB = 2$ ולכן C, B, A הם שורשי המשוואה:

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 4 = 0$$

יוצא כי כל אחד מהם מקיים:

$$x^n = 3x^{n-1} - 2x^{n-2} - 4x^{n-3}$$

עבור: $n \geq 4$.

41. בשלב הראשון נקבל ריבוע שחור ששטחו $\frac{1}{9}$.

בשלב השני מחלקים את הריבוע ABCD ל- 9^2 ריבועים. ומתקבלים 8 ריבועים (קטנים) שחורים ששטחם $\frac{8}{9^2}$.

בשלב השלישי מחלקים את הריבוע ABCD ל- 27^2 ריבועים, מביניהם נקבל 64 ריבועים שחורים חדשים ששטחם $\frac{64}{27^2}$ וכו'.

סכום השטחים המבוקש הוא איפוא סכום של סדרה הנדסית אינסופית:

$$S = \frac{1}{3^2} + \frac{2^3}{3^4} + \frac{2^6}{3^6} + \dots$$

כאשר: $a_1 = \frac{1}{3^2}$ ו $q = \frac{2^3}{3^2} < 1$

$$S_n = \frac{\frac{1}{3^2}}{1 - \frac{2^3}{3^2}} = 1$$

42. $a_1 = \frac{8}{3}$

$$a_n = \frac{1}{27}[8 + 3a_{n-1} + 8\sqrt{1+3a_{n-1}}] \quad , \quad n \geq 2$$

מכאן

$$a_{n+1} = \frac{1}{27}[8 + 3a_n + 8\sqrt{1 + 3a_n}] \quad (1)$$

נסמן

$$(*) \quad 1 + 3a_n = x_n^2$$

אזי

$$a_n = \frac{x_n^2 - 1}{3} \quad (2) \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{x_{n+1}^2 - 1}{3} \quad (3)$$

מ (1) נקבל:

$$(4) \quad a_{n+1} = \frac{1}{27}(8 + x_n^2 - 1 + 8x_n) = \frac{1}{27}(x_n^2 + 8x_n + 7)$$

מ (3) ו (4) נקבל:

$$\frac{x_{n+1}^2 - 1}{2} = \frac{x_n^2 + 8x_n + 7}{27}$$

$$x_{n+1}^2 = 1 + \frac{x_n^2 + 8x_n + 7}{9} = \frac{(x_n + 4)^2}{9}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 4}{3}$$

$$x_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(x_n - 2)$$

$$x_{n+1} - 2 = \frac{1}{3^n}(x_1 - 2)$$

מכאן

$$x_n - 2 = \frac{1}{3^{n-1}}(x_1 - 2) \qquad (5)$$

לפי (*)

$$x_1^2 = 1 + 3a_1$$

$$x_1^2 = 1 + 3 \cdot \frac{8}{3} = 9$$

$$x_1 = 3$$

וכן מ (5):

$$x_n = 2 + \frac{1}{3^{n-1}}$$

מ (6) ו (2) נקבל $\qquad a_n = \frac{1}{3}(x_n{}^2 - 1) =$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(2 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4 + \frac{4}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^{2n-2}} - 1\right]$$

$$= 1 + \frac{4}{3^n} + \frac{1}{3^{2n-1}}$$

פונקציות

43. מהמערכת:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 2ax + b \end{cases}$$

נובע כי:

$$(1) \quad ax^2 + (b - 2a)x + c - b = 0$$

כיון שהפרבולה חותכת את ציר ה-x , $b^2 - 4ac > 0$.

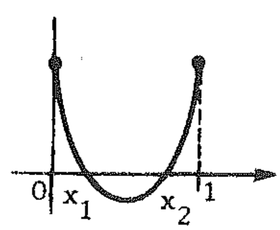
לכן הדיסקרימיננטה של המשוואה (1) מקיימת:

$$D = 4a^2 - 4ac + b^2 > 0$$

מכאן, לישר $y = 2ax + b$ ולפרבולה $y = ax^2 + bx + c$, יש שתי נקודות משותפות, כלומר ישר זה איננו משיק לפרבולה.

44. נבדוק מהו המספר הטבעי הקטן ביותר a, בעבורו קיימת פונקציה ריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$ כך ש b ו c מספרים שלמים ושני השורשים שלה יהיו חיוביים שונים זה מזה וקטנים מ 1.

א)



$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1)$$

a, b ו c שלמים, $a > 0$, $0 < x_1 < 1$ ו $0 < x_2 < 1$ אזי $f(1) > 0$
ו $f(0) > 0$ ושניהם מספרים טבעיים (ראה השרטוט).

מכאן $f(0)f(1) \geq 1$

$$f(0) = a(0 - x_1)(0 - x_2)$$

$$f(1) = a(1 - x_1)(1 - x_2)$$

לכן

$$ax_1x_2\, a(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 1$$

$$a^2x_1(1 - x_1)\; x_2(1 - x_2) \geq 1 \qquad (2)$$

ב) נוכיח כי $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$ לכל x

$$x - x^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$$

ושוויון קיים כאשר $x = \frac{1}{2}$.

כיון ש x_1 ו x_2 חיוביים ושונים זה מזה:

$$x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) < \frac{1}{16}$$

$$a^2x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) < \frac{a^2}{16} \qquad (3)$$

מ (2) ו (3):

$$\frac{a^2}{16} > 1 \quad \Longrightarrow \quad a > 4$$

מכאן המספר a הקטן ביותר הוא 5.

ג) <u>דוגמא:</u>

$$a = 5$$

$$f(x) = 5x^2 + bx + c$$

אם: $f(0)f(1) = 1$

אז: $c(5 + b + c) = 1$

$$c = 1 \qquad b = -5$$

$$f(x) = 5x^2 - 5x + 1$$

שורשיה:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}$$

בחרנו $f(0)f(1) = 1$, שכן אילו היה $f(0)f(1) \geq 2$ אזי נקבל:

$$\frac{a^2}{16} > 2$$

$$a^2 > 32 \ , \ a > 3$$

45. מאחר ש $a + b + c + d = 0$ נובע כי:

$$(a + b - c - d)(a - b + c - d)(a - b - c + d) = 8(a + b)(a + c)(a + d)$$
$$= 8\{a^3 + a^2(b + c + d) + a(bc + cd + db + bcd\}$$
$$= -8$$

אבל: $a + b - c - d \leq 0$ וגם $a - b + c - d \leq 0$.

46. נכפול את שני האגפים של

$$(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^{19} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{76}\,x^{76}$$

ב $(1 + x)^{19}$:

$$(1 + x)^{19}(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)^{19} = (1 + x^5)^{19} = \sum_{k=0}^{19}\binom{19}{k}x^{5x} \qquad (1)$$

באופן כללי,

$$(1 + x)^{19}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{76}x^{76}) =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{19} \binom{19}{j_1} x^{j_1} \cdot \left(\sum_{j_2=0}^{76} a_{j_2} x^{j_2} \right) = \sum_{j=0}^{95} \left(\sum_{\substack{j_1+j_2=j \\ 0\le j_1\le 19}} \binom{19}{j_1} a_{j_2} \right) x^j \qquad (2)$$

מ (1) ו (2) נובע כי המקדמים של x בחזקות שאינן כפולות של 5 חייבים להיות אפס.

הביטוי

$$a_{47} + \binom{19}{1} a_{46} + \binom{19}{2} a_{45} + \ldots + \binom{19}{17} a_{30} + \binom{19}{18} a_{29} + a_{28}$$

הוא המקדם של x^{47} שכן צורתו:

$$\sum_{\substack{j_1+j_2=47 \\ 0\le j_1\le 19}} \binom{19}{j_1} a_{j_2}$$

ולכן הוא שווה ל 0.

47. נחשב: $f(x) + f(1 - x)$

$$f(x) + f(1 - x) = \frac{a^{2x+k}}{a^{2x}+a} + \frac{a^{-2x+2+k}}{a^{-2x+2}+a} = a^k \qquad (1)$$

נסמן את הסכום המבוקש ב s. אזי:

$$s = f(0) + f(\tfrac{1}{n}) + f(\tfrac{2}{n}) + \ldots + f(1 - \tfrac{1}{n}) + f(1) \qquad (2)$$

$$s = f(1) + f(1 - \tfrac{1}{n}) + f(1 - \tfrac{2}{n}) + \ldots + f(\tfrac{1}{n}) + f(0) \qquad (3)$$

נחבר (2) ו (3) ונקבל:

$$2s = [f(0) + f(1)] + [f(\tfrac{1}{n}) + f(1 - \tfrac{1}{n})] + \ldots + [f(1) + f(0)]$$

מ (1) נקבל: $2s = (n + 1)a^k$

$$s = \frac{1}{2}(n + 1)a^k$$

48. נתון כי: $f(1) = 2$ (1)

ו- $f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$ (2)

מכאן עבור כל x רציונלי (אם נציב 1 במקום y) נקבל:

$$f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) - f(x + 1) + 1$$

$$f(x) = 2f(x) - f(x + 1) + 1$$

$f(x + 1) = f(x) + 1$ (מכאן $f(0) = 1$).

באינדוקציה מתמטית קל להוכיח כי:

$$f(x + n) = f(x) + n \quad (3)$$

עבור x - רציונלי ו n שלם.

מכאן: $f(n) = n + 1$ (4)

לכל n שלם.

יהיו n ו m מספרים שלמים ו $m \neq 0$, אזי (לפי (2)):

$$f(n) = f(\frac{n}{m} \cdot m) = f(\frac{n}{m})f(m) - f(\frac{n}{m} + m) + 1$$

לפי (3) ו (4):

$$n + 1 = f(\frac{n}{m})(m + 1) - f(\frac{n}{m}) - m + 1$$

מכאן: $f(\frac{n}{m}) = \frac{n}{m} + 1$.

49. (i) נבחר p תלמידים בצורה הבאה: כל a התלמידים מבית ספר א' ו $p-a$ תלמידים מבית ספר ב'. יש לכך:

$$C_b^{p-a} = \frac{b!}{(p-a)!(b+a-p)!} \text{ אפשרויות}$$

(ii) $b-(p-a)$ התלמידים הנותרים מבית ספר ב': כלומר $b+a-p$ תלמידים, נסדר בזוגות עם התלמידים של בית ספר א'.
(קל להוכיח כי: $b + a - p \leq a$)

יש לכך:

$$(a + b - p)!C_a^{a+b-p} = \frac{a!(a+b-p)!}{(a+b-p)!(p-b)!} = \frac{a!}{(p-b)!}$$

(iii) את c התלמידים מבית ספר ג', נסדר בזוגות עם c הנותרים. יש $c!$ אפשרויות. לפי משפט הכפל, מספר האפשרויות הוא:

$$\frac{b!}{(p-a)!(b+a-p)!} \cdot \frac{a!}{(p-b)!} \cdot c! = \frac{a!b!c!}{(p-a)!(p-b)!(p-c)!}$$

כי: $b + a - p = p - c$ (הוכח!)

50. מהנתונים נובע כי אם אחת הועדות מורכבת מתת-קבוצה אחת אזי אין ועדה אחרת המורכבת מתת-הקבוצה המשלימה.
מאחר שהמספר הכולל של תת-קבוצות הוא 32, נובע כי מכל זוג (תת-קבוצה ותת-קבוצה משלימה) יופיע בדיוק נציג אחד ברשימה.

אם יש ועדה של חבר אחד, נגיד a, אזי הוא ישתייך לכל הועדות האחרות והבעיה נפתרה. אם אין ועדה כזאת, נניח כי יש ועדה של שניים $\{a, b\}$. ועדה שניה של שניים היתה צריכה להכיל אחד מבין $\{a, b\}$ נגיד $\{a, c\}$, ואז a יהיה בכל הועדות האחרות.

אם אין ועדה שניה של שניים, נצטרך לנצל את כל הקבוצות של שלושה, פרט ל-$\{c, d, e\}$, את חמש הקבוצות של 4 ואת הקבוצה המלאה, כדי להרכיב 16 ועדות. אבל לקבוצות $\{a, b, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{a, d, e\}$ אין חבר משותף.

51. קיימים סה"כ 900 מספרים תלת-ספרתיים (100 עד 999).
לכן קיימים 405,450 $(CC_{900}^2 = C_{901}^2 = 405,450)$ זוגות של מספרים תלת-ספרתיים.

מכאן, ישנם לכל היותר 405,450 מספרים בעלי 6 ספרות, שניתן להציגם כמכפלה של שני מספרים תלת-ספרתיים. כיון שקיימים 900,000 מספרים בעלי 6 ספרות (100,000 עד 999,999), נובע שישנם ביניהם יותר מספרים שאי-אפשר להציג כמכפלת שני מספרים תלת-ספרתיים.

52. דרך I

אם L הוא מספר המיתרים, ו P מספרן של נקודות החיתוך של המיתרים בפנים המעגל, אזי מספר התחומים הוא $P + L + 1$ (משפט סזר).

ניתן להוכיח זאת בעזרת אינדוקציה על L. כי אם נוסיף מיתר אחד, הרי שהגידול במספר התחומים יהיה שווה למספרן של נקודות החיתוך הפנימיות ועוד 1. זה נובע מכך שכל נקודת חיתוך פנימית חדשה מציינת חילוק של אחד התחומים החדשים לשני תחומים (ראה הציור).

נחזור לבעיה המקורית. במקרה שלנו ברור כי $L = \binom{n}{2}$. אבל כל קבוצה של 4 נקודות על המעגל קובעת נקודה פנימית אחת (ראה הציור) ולכן $P = \binom{n}{4}$.
נובע כי מספר התחומים הוא:

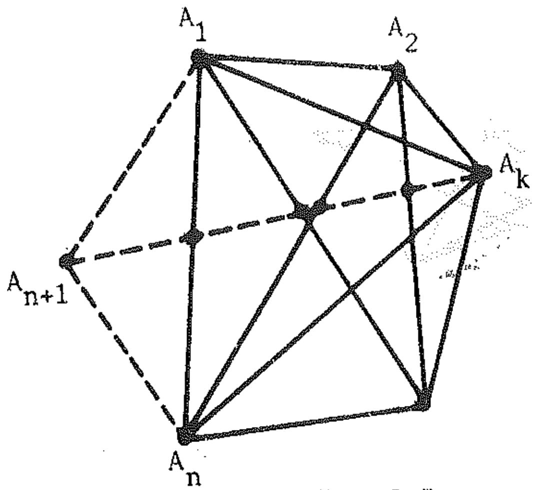
$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$= 1 + \frac{n(n-1)}{24}(n^2 - 5n + 18)$$

דרך II

n נקודות על היקף עיגול יוצרות מצולע קמור בעל n צלעות. צלעות אלה חותכות מהעיגול n חלקים (תחומים). לכן נשאר למצוא את המספר המירבי של תחומים אשר יוצרים אלכסוני המצולע. מספר זה יהיה המירבי במקרה שאף שלושה מאלכסוניו, אינם
עוברים דרך נקודה אחת.



נסמן את מספר התחומים המירבי ב $F(n)$. נוסיף נקודה A_{n+1}, כך שמצולע $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ יהיה קמור.

נחפש את הקשר בין $F(n+1)$ לבין $F(n)$. נניח ש $F(n)$ ידוע ונחשב את המספר המירבי של תחומים נוספים שנקבל, כאשר נוסיף את הקודקוד A_{n+1}.

נחבר את A_{n+1} עם הקודקוד ה-k $(k = 2,3,\ldots,n - 1)$.

בצד אחד של $A_{n+1}A_k$ נמצאים $k - 1$ קודקודים $(A_1,A_2,\ldots,A_{k-1})$ ובצד האחר - $n - k$ $(A_{k+1},A_{k+2},\ldots,A_n)$. לכן האלכסון $A_{n+1}A_k$ חותך $(k - 1)(n - k)$ אלכסונים של המצולע $A_1,A_2,\ldots,A_{n+1}$. נקודות החיתוך האלה מחלקות את האלכסון $A_{n+1}A_k$ ל $(k - 1)(n - k) + 1$ חלקים. לכן האלכסון $A_{n+1}A_k$ מוסיף עוד $(k - 1)(n - k) + 1$ חלקים.

מכאן נובע כי אם נעביר את כל האלכסונים מהקודקוד A_{n+1} נקבל:

$$F(n+1) = F(n) + [(2-1)(n-2)+1] + [(3-1)(n-3) + 1] + \ldots + [(n-1-1)(n-(n-1)) + 1] =$$

$$= F(n) + n + 2n + \ldots + (n-2)n - [1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (n-2)(n-1)] + n - 1 =$$

$$= F(n) + \frac{n(n - 1)(n - 2)}{6} + n - 1$$

מכאן:

$$F(n + 1) = F(n) + \frac{n(n - 1)(n - 2)}{6} + n - 1$$

$$F(n) = F(n - 1) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + n - 2$$

$$\ldots$$

$$F(4) = F(3) + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{6} + 2$$

$$F(3) = 1$$

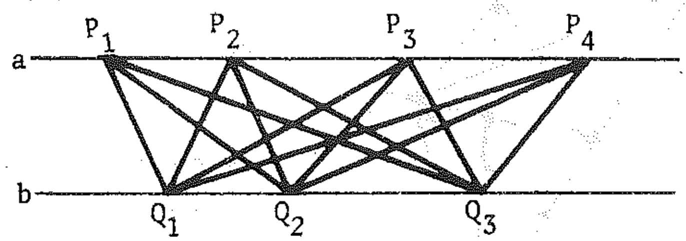
נחבר את השוויונים ונקבל:

$$F(n) = \frac{1}{24}(n - 1)(n - 2)(n^2 - 3n + 12)$$

אם נוסיף עוד את n התחומים שמחוץ למצולע ונקבל:

$$F(n) = \frac{1}{24}(n - 1)(n - 2)(n^2 - 3n + 12) + n = 1 + \frac{n(n-1)}{24}(n^2 - 5n + 18)$$

.53



כל זוג (P_α, P_β) יחד עם כל זוג (Q_γ, Q_δ) קובעים נקודת חיתוך אחת.
התשובה היא:

$\binom{n}{2}\binom{m}{2}$ דהיינו $\frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$.

בעיות שונות

.54 צריך לבדוק מספר מקרים אפשריים.
נות להתחיל מהטענה כי "אחד מהם מסר עדות אשר כולה שקר". מקבלים שילד B מסר עדות אשר כולה שקר, ומכאן נובע שהילדים B ו E גנבו תפוחים.

.55 בכל מהלך, הצריח מחליף את צבע המשבצת עליה הוא עומד.
מנתוני הבעיה נובע כי עליו לעשות מספר אי-זוגי של מהלכים - 63. מכאן הוא יסיים במשבצת בעלת צבע שונה מזה של המשבצת בה התחיל. אך פינות נגדיות בלוח שחמט צבועות בצבע זהה. מכאן, לא ניתן לבצע את הנדרש.

.56 נסמן את המטבעות ב x, y, z ו t. בשקילה ראשונה נשקול את (x, y, z).

א) אם בשקילה הראשונה נקבל 12 גרם, אזי $x = y = z = 4$.
בשקילה השניה נשקול את t וכך נמצא את משקלו.

ב) אם בשקילה הראשונה נקבל 15 גרם, אזי $x = y = z = 5$.
בשקילה השניה נשקול את t וכך נמצא את משקלו.

אם בשקילה הראשונה מתקבלות תוצאות שונות מאלו שב-א' וב' אזי:
בשקילה הראשונה נשקול את (x ,y ,z)
בשקילה השניה נשקול את (x ,y ,t)
ובשקילה השלישית נשקול את (x ,z ,t).

יכולים להתקבל ארבעה מקרים:

(i) 13 גרם, 13 גרם, 13 גרם

(ii) 13 גרם, 13 גרם, 14 גרם

(iii) 13 גרם, 14 גרם, 14 גרם

(iv) 14 גרם, 14 גרם, 14 גרם

או אותן תוצאות לפי סדר אחר.

נתבונן במקרה הראשון:

1) $\begin{cases} x + y + z = 13 & (1) \\ x + y + t = 13 & (2) \\ x + z + t = 13 & (3) \end{cases}$

מ-(1) ו-(2) נובע כי $z = t$

מ-(1) ו-(3) נובע כי $y = t$

מכאן: $z = t = y$

ברור כי $z = t = y = 4$, כי אילו הם היו שווים ל 5, אזי x שווה ל 3, בסתירה לנתונים. מ-(1) נקבל כי $x = 5$.

באותה דרך נקבל כי במקרה (ii) $z = t = 5$ ו $x = y = 4$

(iii) $y = z = 4$ ו $t = x = 5$

(iv) $z = t = y = 5$ ו $x = 4$

57. נוכיח שיש לפחות 17 חברים במועדון, כך שכל אחד מהם מכיר את כל 19 החברים האחרים.

נניח שלא כל 20 החברים מכירים זה את זה. אזי ימצאו שני חברים במועדון, שאינם מכירים זה את זה. נסמן אותם ב A ו B.

נסתכל על קבוצה של ארבעה חברי המועדון שמכילה את A ו B, נסמנם: Y, X, B, A. לפי הנתונים יש ביניהם לפחות חבר אחד המכיר את כל שלושת האחרים. חבר זה יכול להיות X או Y, שכן A ו B אינם מכירים זה את זה. נניח ש X מכיר את A, B ו Y.

בעזרת שיקול דומה ניתן להוכיח שבקבוצה Z, X, B, A X מכיר את Z, B, A או Z מכיר את X, B, A. כלומר, X מכיר גם את Z. באופן דומה קל להוכיח ש X מכיר את כל 19 החברים האחרים. בדרך זו הוכחנו שבכל קבוצה של ארבעה חברים המכילה את A ו B, קיים חבר אחד, המכיר את כל חברי המועדון.

מכאן נובע כי בנוסף ל A ו B, ימצא לכל היותר חבר אחד, אשר אינו מכיר את כל חברי המועדון.

58. נחלק את הריבוע (באמצעות ישרים מקבילים) ל n^2 ריבועים חופפים. אורך הצלע של כל ריבוע קטן הוא $\frac{1}{n}$.
קיים לפחות ריבוע אחד שבתוכו או על היקפו נמצאות לפחות שלוש נקודות (שכן אילו לא היה קיים ריבוע כזה, אזי מספר הנקודות היה קטן או שווה ל $2n^2$). ממרכזו של ריבוע זה נעביר מעגל שרדיוסו $\frac{1}{n}$.
מעגל זה הוא המעגל המבוקש.

59. נסמן את הזמן שהאכר רכב בתחילה על החמור ב x שעות. אזי הוא עבר ברכיבה מרחק של 10x ק"מ. בנו מגיע אל החמור כעבור 2x שעות שכן מהירותו היא מחצית ממהירות החמור. כשהבן מגיע אל החמור, האכר נמצא במרחק של 4x ק"מ מהמקום בו עזב את החמור.
כיון שבכל שעה המרחק בין האכר לבנו קטן ב 6 ק"מ (10-4), הבן יגיע לאכר כעבור $\frac{4x}{6}$ כלומר $\frac{2}{3}x$ שעות. ברגע זה הם יהיו במרחק של:

$$\frac{50}{3}x = 10x + 4x + \frac{2\cdot 4}{3}x$$ ק"מ מהכפר

באופן דומה נקבל כי לאחר מחזור נוסף הם עוברים: $\frac{50}{3}y$ ק"מ נוספים.
בניח שבמחזור האחרון הם עוברים $\frac{50}{3}t$ ק"מ.

אזי $$\frac{50}{3}x + \frac{50}{3}y + \ldots + \frac{50}{3}t = 50$$

מכאן $$\frac{50}{3}(x + y + \ldots + t) = 50$$

ו $$x + y + \ldots + t = 3$$

כלומר הם היו בדרך 3 שעות והגיעו לעיר בשעה 8.

60. נסמן את המספרים הנתונים לפי גודלם:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n+1}$$

ת ההפרשים: $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$, ... , $a_{n+1} - a_1$ הם חיוביים, שונים זה מזה וקטנים מ 2n.
בין 2n + 1 מספרים ($a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ ו $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n+1} - a_1$) טבעיים קטנים מ 2n, ישנם לפחות שניים שווים. כיוון שבין n + 1 המספרים הנתונים אין שניים שווים וגם בין n ההפרשים הנ"ל אין שניים שווים, אזי מספר מסויים a_k בין המספרים הנתונים שווה לאחד ההפרשים $a_m - a_1$.

כלומר:

$$a_k = a_m - a_1$$

מכאן:
$$a_m = a_k + a_1$$

61. כל נקודה "חיובית" אשר מיד אחריה (לפי כיוון מחוגי השעון) נמצאת נקודה "שלילית", לא יכולה להיות טובה, כי האיבר השני בסדרת הסכומים הוא 0. כלומר, כל נקודה "שלילית" לא מאפשרת לנקודה שלפניה להיות טובה. מחיקת כל זוג נקודות כאלה לא תשנה את מצבן של הנקודות האחרות. הטובות יישארו טובות ולהיפך. בחזור על פעולת המחיקה עד שייעלמו כל הנקודות השליליות. אלה שיישארו יהיו בודאי טובות, ומספרן הוא

$$r - (n-r) = 2r - n$$

62. נניח כי לא כולם שווים. נחסר מכל אחד את הקטן ביותר ביניהם. גם הקבוצה החדשה שנוצרה מקיימת את תנאי הבעיה. אם נוציא ממנה את האיבר 0, נראה כי הסכום של כולם מתחלק ב-3. עכשו נוציא כל איבר אחר וסכום הנשארים יתחלק גם הוא ב 3. מכאן יוצא כי כל איבר מתחלק ב-3, נחלק את כולם ב-3 וגם קבוצה חדשה זו מקיימת את התנאים. יוצא כי ניתן לחלק את האיברים ב-3 אינסוף פעמים, וזה לא יתכן.

63. יהיה A_1 המספר הגדול ביותר המופיע על הקוביה, A_2 הגדול ביותר אחרי הטיפול הראשון, וכן A_3, A_4, ..., כמו כן, יהיו B_1, B_2, B_3, ... המספרים הקטנים ביותר בשלבים השונים. מאחר ש A_{k+1} הוא ממוצע של 4 מספרים אשר כולם שווים ל A_k או קטנים ממנו, נובע כי $A_{k+1} \le A_k$. כמו כן $B_{k+1} \ge B_k$. יש לנו איפוא

$$A_1 \ge A_2 \ge A_3 \dots \ge A_n$$
$$B_1 \le B_2 \le B_3 \dots \le B_n$$

אם המצב n זהה עם המצב המקורי, אזי $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ וגם $B_1 = B_2 = \dots = B_n$. אבל לא יתכן כי $A_1 = A_2$ ו $B_1 = B_2$ אלא אם כן כל המספרים שעל הקוביה הראשונה זהים.

64. כאשר יש n תחנות רכבת, אזי מספר סוגי הכרטיסים הוא $n(n - 1)$.

כאשר יש $m + n$ תחנות, מספר סוגי הכרטיסים הוא: $(m + n)(m + n - 1)$.

מתנאי הבעיה נובע כי:

$$(m + n)(m + n - 1) - n(n - 1) = 34$$

מכאן:

$$m(m + 2n - 1) = 34$$

כיון ש m ו n מספרים טבעיים ו $m > 1$, נקבל כי:

$$\begin{cases} m = 17 \\ m + 2n - 1 = 2 \end{cases} \quad \text{או:} \quad \begin{cases} m = 2 \\ m + 2n - 1 = 17 \end{cases}$$

מכאן $m = 2 \quad , \quad n = 8$

65. נסמן את המספרים כמתואר בלוח שבשרטוט.

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

נניח שאי אפשר למצוא שורה וטור בלוח, כך שסכום 7 המספרים הרשומים בשבע המשבצות שבשורה ובטור הללו, יהיה קטן מ-15.

כלומר, הסכום גדול או שווה ל-15.

מכך נקבל כי:

$$\left\{\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_9 + a_{13} &\geq 15 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_6 + a_{10} + a_{14} &\geq 15 \\ &\vdots \\ a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_4 + a_8 + a_{12} &\geq 15 \end{aligned}\right.$$

מכך נקבל כי:

$$7(a_1 + a_2 + \dots + a_{16}) \geq 15 \cdot 16$$

בניגוד לנתונים

66. נניח $a < b < c$

a^n, b^n ו c^n הם אורכי הצלעות של משולש ולכן

$$c^n < a^n + b^n \qquad (1)$$

נרשום את c^n בצורה אחרת:

$$\begin{aligned} c^n &= [b + (c - b)]^n = \\ &= b^n + nb^{n-1}(c-b) + \frac{n(n-1)}{2}b^{n-2}(c-b)^2 + \ldots + (c-b)^n > \\ &> b^n + nb^{n-1}(c-b) \end{aligned}$$

כי $c - b > 0$

$$c^n > b^n + nb^{n-1}(c-b) \qquad (2)$$

a^n, b^n ו c^n הם אורכי צלעות של משולש בעבור כל n טבעי. נבחר n שיקיים

$$n(c - b) > b$$

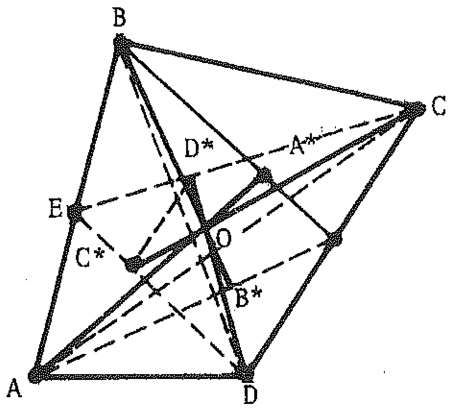
אזי מ (2) נקבל

$$c^n > b^n + b^n > b^n + a^n$$

אך אי-שוויון זה סותר את (1), לכן בין a^n, b^n ו c^n צריכים להיות שני מספרים שווים.

67. דרך I

תהי E אמצע של AB. נתון כי D^* מרכז הכובד של ΔABC ו C^* מרכז הכובד של ΔABD. נסמן ב Q את נקודת החיתוך של DD^* ו CC^* (הוכח שהם נחתכים).



כיון ש CE תיכון של המשולש ABC ו DE תיכון של המשולש ABD מתקיים:

$$\frac{EC^*}{ED} = \frac{1}{3} \quad \text{ו-} \quad \frac{ED^*}{EC} = \frac{1}{3}$$

מכאן: $\frac{EC^*}{ED} = \frac{ED^*}{EC}$ (לפי משפט תלס)

$$C^*D^* \parallel CD$$

$$\frac{C^*D^*}{CD} = \frac{1}{3}$$

כיון ש $\Delta COD \sim \Delta C^*OD^*$, נקבל כי:

$$\frac{C^*O}{C^*C} = \frac{D^*O}{D^*D} = \frac{C^*D^*}{CD} = \frac{1}{3}$$

באופן דומה אפשר להוכיח כי DD^* ו AA^* חותכים זה את זה, ונקודת החיתוך מחלקת אותם ביחס $\frac{1}{3}$. אך הנקודה O מחלקת את D^*D ביחס $\frac{D^*O}{DO} = \frac{1}{3}$.
לכן גם AA^* עובר דרך O. באותה דרך מוכיחים כי גם BB^* עובר דרך O.

דרך II

נשלים ארבע מסות שוות, אחת בכל אחד מהקודקודים D, C, B, A.

מרכז הכובד של המסות ב- C, B, A יהיה ב D^* ולכן מרכז הכובד של כל ארבע המסות יימצא על הישר DD^*, כמו כן גם CC^*, BB^*, AA^* יעברו כולם דרך מרכז כובד זה.

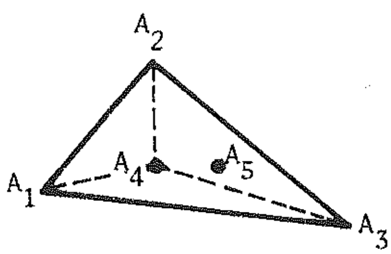
68. ראשית נוכיח את הטענה הבאה: בתונות n נקודות במישור, אזי הן נמצאות על ישר אחד, או שקיים מצולע קמור בעל m צלעות $(m \leq n)$ אשר קודקודיו ב m נקודות מתוך n הנקודות ושאר $n - m$ הנקודות (אם $m < n$) נמצאות בתוך המצולע או על היקפו.

כדי להוכיח טענה זו נעביר ישר a_1 שימצא משמאל לכל n הנקודות. נזיז ישר זה לימין עד שהוא יעבור דרך אחת מהנקודות, נסמן אותה ב A_1. נסובב את a_1 סביב A_1 לפי כיוון מחוגי השעון, עד שהוא יעבור דרך נקודה נוספת. נסמן אותה ב A_2. נסמן את הישר שנתקבל ב a_2.
(אם a_2 עובר דרך מספר נקודות, אזי נסמן את הנקודה הרחוקה ביותר מהנקודה A_1 ב A_2) באופן דומה נסובב a_2 סביב A_2, לפי כיוון מחוגי השעון, עד שהוא יעבור דרך נקודה אשר נסמנה ב- A_3. את הישר המתקבל נסמן ב a_3 וכו' לבסוף (כי מספר הנקודות הוא סופי) נקבל מצולע קמור $A_1A_2 \ldots A_m$ המבוקש.

נדון עתה במקרה ש $n = 5$.

א) אם לפחות שלוש מהנקודות הנתונות נמצאות על ישר אחד, אזי הן מהוות זוית שטוחה השווה ל- $180°$.

ב) אם חמש הנקודות מסודרות באופן הבא:

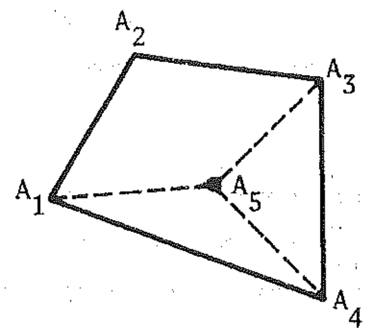


נחבר את A_4 עם קודקודי A_1, A_2 ו A_3. נקבל:

$$\sphericalangle A_1A_4A_2 + \sphericalangle A_2A_4A_3 + \sphericalangle A_3A_4A_1 = 360°$$

מכאן, לפחות אחת מהזויות הנ"ל גדולה או שווה ל- $\frac{360°}{3} = 120°$ אך קטנה מ- $180°$.

ג) אם חמש הנקודות מסודרות כדלקמן:

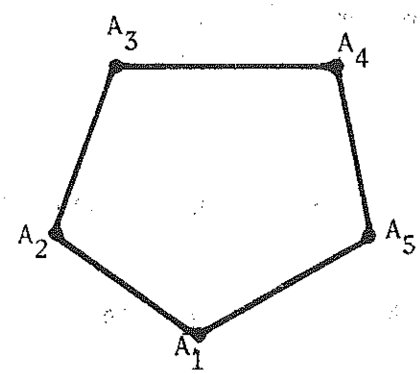


נחבר את A_5 עם שלושה קודקודים, למשל A_1, A_3 ו A_4 , אזי:

$$\sphericalangle A_1A_5A_4 + \sphericalangle A_4A_5A_3 + \sphericalangle A_3A_5A_1 = 360^\circ$$

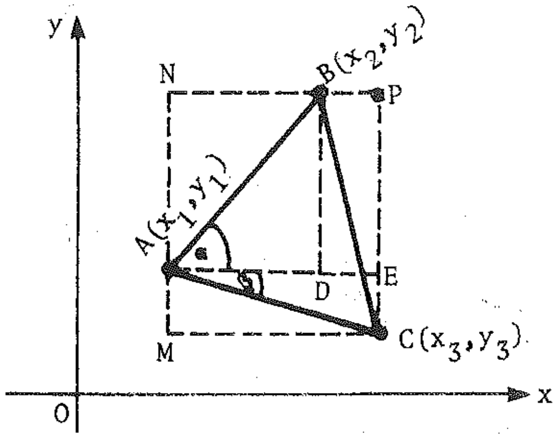
מכאן, אחת הזויות גדולה או שווה ל- 120°, וקטנה מ 180°.

ד) אם חמש הנקודות מסודרות כך:



המצולע $A_1A_2A_3A_4A_5$ הוא מחומש קמור. אזי סכום זויותיו (הפנימיות) שווה ל- 540°. מכאן, לפחות אחת מהן גדולה או שווה ל $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$ וקטנה מ- 180°.

69. <u>דרך I</u>



נניח שניתן לבנות משולש כנדרש.
נסמן את קודקודיו $A(x_1\ ,y_1)$,
$B(x_2\ ,y_2)$, $C(x_3\ ,y_3)$, y_i,
x_i - מספרים שלמים. נחסום את
המשולש במלבן MNPC כמתואר בשרטוט.

$$S_{\Delta ABC} = S_{\boxed{}MNPC} - S_{\Delta AMC} - S_{\Delta AMB} - S_{\Delta BPC} \quad (1)$$

אורכי צלעותיהם של $\boxed{}MNPC$, ΔAMC , ΔANB ו- ΔBPC
הם מספרים שלמים. לכן שטחיהם הם מספרים רציונליים והאגף הימני ב (1)
הוא מספר רציונלי. מכאן, שטח ΔABC הוא מספר רציונלי.
מאידך, נסמן ב a את הצלע ΔABC. ממשפט פיתגורס נקבל כי a^2 הוא מספר שלם.

$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a^2 מספר שלם ולכן השטח של ΔABC הוא מספר אי-רציונלי.
סתירה, ולכן לא קיים ΔABC כנדרש.

<u>דרך II</u>

נניח שניתן לבנות משולש כנדרש.

נסמן $\sphericalangle BAD = \alpha$ ו- $\sphericalangle CAE = \beta$

נשתמש בנוסחה: $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

ונקבל: $$tgA = tg(\alpha + \beta) = \frac{\frac{DB}{AD} + \frac{CE}{AE}}{1 - \frac{DB}{AD}\cdot\frac{CE}{AE}}$$

כיון ש x_i ו y_i מספרים שלמים, אזי גם אורכי הקטעים AD , DB , AE
ו CE הם מספרים טבעיים.

לכן tgA הוא מספר רציונלי.

אך כידוע $A = 60°$ ו $tg60° = \sqrt{3}$ כלומר מספר אי-רציונלי.

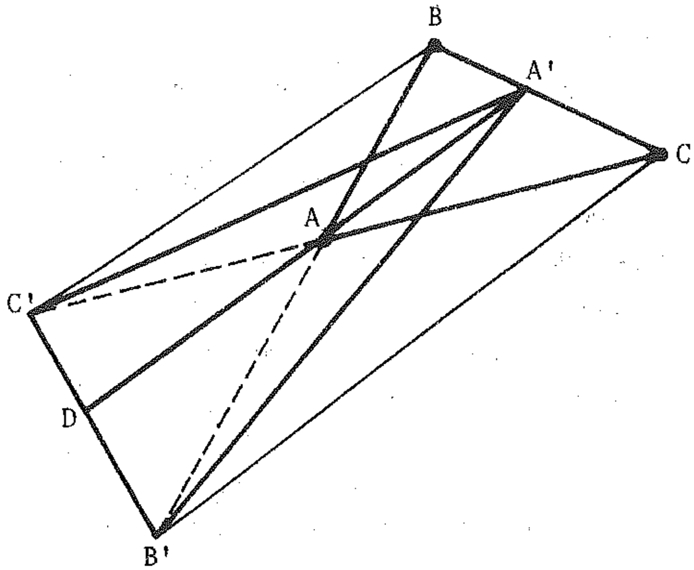
סתירה, ולכן לא קיים ΔABC כנדרש.

52560-2

70. נתון: $B'C' \parallel AA' \parallel B'C$

נוכיח כי $DA = AA'$ (DA - המשך ל- AA')

הוכחה:



$$\Delta ABC' \sim \Delta AB'C$$

מכאן

$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC'}{AC}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{BB'} = \frac{AC'}{CC'} \qquad (1)$$

$$\Delta ABA' \sim \Delta B'BC$$

מכאן

$$\Downarrow$$

$$\frac{AA'}{B'C} = \frac{AB}{BB'}$$

$$\Delta DC'A \sim \Delta B'C'C$$

מכאן

$$\Downarrow$$

$$\frac{DA}{B'C} = \frac{AC'}{CC'} \qquad (2)$$

מ- (1), (2) ו (3):

$$\frac{DA}{B'C} = \frac{AA'}{B'C} \qquad (3)$$

$$\Downarrow$$

$$DA = AA'$$

$DA' = 2AA'$ ו- $B'C \parallel DA'$ לכן $S_{\Delta B'DA'} = 2S_{\Delta CAA'}$ (4)

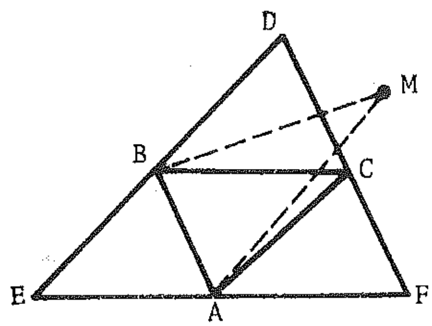
$DA' = 2AA'$ ו- $BC' \parallel DA'$ לכן $S_{\Delta C'A'D} = 2S_{\Delta BAA'}$ (5)

מ-(4) ו- (5) נובע: $S_{\Delta A'B'C'} = 2S_{\Delta ABC}$

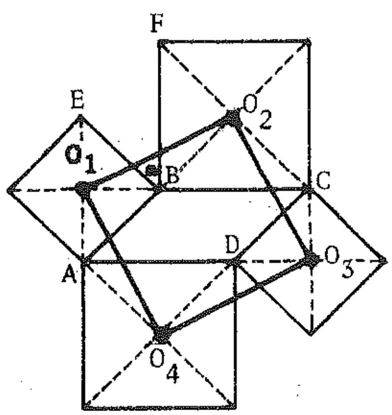
71. מספר הנקודות הוא סופי. לכן, בין כל המשולשים הנדונים בבעיה, קיים משולש ששטחו מקסימלי אך קטן או שווה ל 1. נסמן משולש זה כמשולש ABC (ראה הציור).

נבנה משולש DEF כך שהנקודות A, B ו C יהיו אמצעי צלעותיו. (לשם כך מעבירים דרך הנקודה A, ישר מקביל ל BC, דרך B - ישר מקביל ל AC ודרך C - ישר מקביל ל AB).
ברור ששטח המשולש DEF איננו גדול מ 4 יחידות שטח.

נניח כי אחת מ n הנקודות הנתונות, למשל M, נמצאת מחוץ למשולש DEF. נחבר את M עם A ו B. אזי שטחי המשולש AMB גדול משטח המשולש ABC (יש להם אותו בסיס AB ומרחק הנקודה M מהצלע AB גדול ממרחק הנקודה C מ AB). וזוהי סתירה להנחה כי שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.



72. נוכיח טענה כללית יותר לגבי מקבילית.
תהי ABCD מקבילית,
O_1, O_2, O_3 ו O_4 מרכזי הריבועים הבנויים על צלעותיהם.



$$\Delta O_1BO_2 \cong \Delta O_3CO_2 \quad (1)$$

לפי משפט חפיפה (ראשון):

$$BO_2 = CO_2 \quad , \quad O_1B = O_3C$$

$$\sphericalangle O_1BO_2 = 90^\circ + \sphericalangle EBF =$$

$$= 90^\circ + \sphericalangle BCD =$$

$$= \sphericalangle O_3CO_2$$

($\sphericalangle EBF = \sphericalangle BCD$ כי שוקי האחת מאונכים לשוקי השניה)

מ (1) נובע כי

$$O_1O_2 = O_2O_3 \quad (2)$$

ו

$$\sphericalangle O_1O_2O_3 = \sphericalangle O_1O_2B + \sphericalangle BO_2C - \sphericalangle CO_2O_3 =$$

$$= \sphericalangle BO_2C = 90^\circ$$

בעזרת שיקול דומה נוכיח כי

$$O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$$

ו

$$\sphericalangle O_2O_3O_4 = \sphericalangle O_3O_4O_1 = \sphericalangle O_4O_1O_2 = 90^\circ$$

כלומר

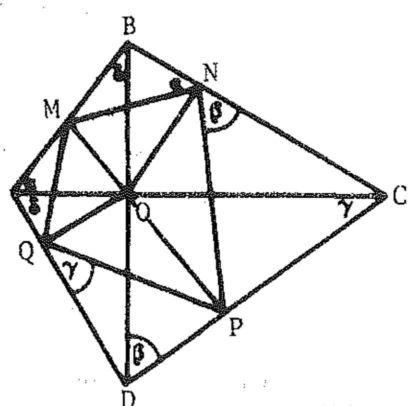
$O_1O_2O_3O_4$ הוא ריבוע

73. ΔAOB ישר זווית ($\sphericalangle O = 90^\circ$)

לכן (1) $OB^2 = AB \cdot BM$

ΔBOC ישר זווית ($\sphericalangle O = 90^\circ$)

לכן (2) $OB^2 = BC \cdot BN$



מ (1) ו (2) נובע

מ $AB \cdot BM = BC \cdot BN$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BN}{BM} \quad (3)$$

$\sphericalangle B$ היא זווית משותפת למשולשים MBN ו CBA.

מכך ומ (3) נקבל

$$\Delta MBN \sim \Delta CBA$$

ולכן $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle N_1 = \alpha$

באותה דרך נוכיח כי:

$$\sphericalangle CNP = \sphericalangle ODC = \beta$$

$$\sphericalangle OCD = \sphericalangle PQD = \gamma$$

מכאן

$$\sphericalangle N + \sphericalangle Q = (180^\circ - \alpha - \beta) + (180^\circ - \gamma - \delta) =$$
$$= (180^\circ - \alpha - \delta) + (180^\circ - \beta - \gamma) =$$
$$= \quad 90^\circ \quad + \quad 90^\circ \quad = 180^\circ$$

74. נסדר את הקטעים לפי גודלם:

$$a \le b \le c \le d \le e$$

נניח כי אין אף משולש חד-זווית בין המשולשים המתקבלים מקטעים אלה.

אזי:

$$c^2 \ge a^2 + b^2$$
$$d^2 \ge b^2 + c^2$$
$$e^2 \ge c^2 + d^2$$

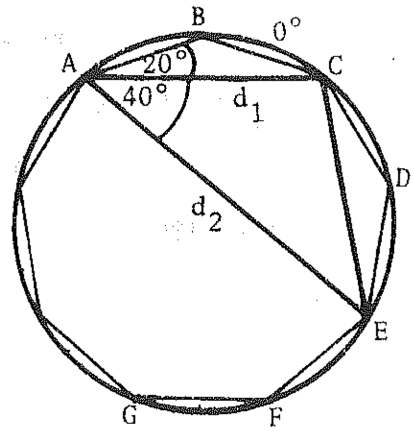
מכאן:

$$c^2 + d^2 + e^2 \ge a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2$$
$$e^2 \ge a^2 + 2b^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) \ge$$
$$\ge a^2 + b^2 + 2bc \ge a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

מכאן: $e \ge a + b$

כלומר, מהקטעים a, b ו e אי אפשר לבנות משולש, בסתירה לנתונים.

75. נסמן את צלע המתושע ב- a_9 .



במשולש ABC מתקיים:

$$d_1 = 2a_9\cos20°$$

במשולש ACE מתקיים:

$$d_2 = 2d_1\cdot\cos40°$$

מכאן

$$d_2 - d_1 = 2a_9\cos20°(2\cos40° - 1)$$

נוכיח כי:

$$2\cos20°(2\cos40° - 1) = 1$$

הוכחה:

$$2\cos20°(2\cos40° - 1) = 4\cos20°\cos40° - 2\cos20° =$$

$$= 2(\cos60° + \cos20°) - 2\cos20° = 1$$

מכאן: $d_2 - d_1 = a_9$.

76. כאשר ישר ℓ חותך קטע כלשהו אזי קצה אחד של הקטע נמצא בצד אחד של הישר ℓ וקצהו האחר בצידו השני של ישר זה. מכאן נובע שאם ישר ℓ חותך את כל צלעותיו של מצולע, אזי מספר קודקודי המצולע מצידו האחד של הישר, צריך להיות שווה למספר קודקודי המצולע מצידו האחר, כלומר, מספר קודקודי המצולע צריך להיות זוגי.

לכן, אם מספר קודקודי המצולע הוא אי זוגי, אזי אין ישר החותך את כל צלעותיו. במיוחד, לא ניתן לבנות מחומש וישר החותך את כל חמש צלעותיו.

77. <u>הגדרה</u>: <u>קוטר</u> של קבוצה סופית של נקודות $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ הוא הקטע הארוך ביותר המחבר שתי נקודות של הקבוצה.

נוכיח את הבעיה בדרך האינדוקציה המתמטית:

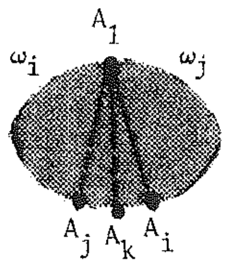
א) $n = 3$. בין שלוש נקודות נתונות, קיימים שלושה $\frac{3(3-1)}{2}$ זוגות של נקודות, וברור שאין יותר מ-3 זוגות המקיימים את השוויון $A_iA_j = d$.

ב) נניח שהטענה נכונה בעבור $n - 1$ נקודות כלומר מבין הקטעים המחברים כל זוג מבין $n - 1$ הנקודות, אין יותר מ- $n - 1$ קטעים שאורכם הוא d.

עתה נוכיח שבין $\frac{n(n-1)}{2}$ הקטעים שמחברים את n הנקודות:
$A_1, A_2, \ldots, A_n$, אין יותר מ- n קטעים אשר אורכם שווה ל- d.

i) נניח כי מכל נקודה יוצאים לכל היותר שני קוטרים. אזי מספר הקוטרים איננו גדול מ- $n = 2n \cdot \frac{1}{2}$.

ii) נניח כי מנקודה מסויימת - A_1 - יוצאים שלושה קוטרים שאורכם d. נסמנם: A_1A_i , A_1A_k ו A_1A_j. אזי הנקודות A_i, A_k ו A_j נמצאות על המעגל $\omega(A_1, d)$ שמרכזו בנקודה A_1 ורדיוסו d. שאר הנקודות הנתונות נמצאות, על כן, על המעגל ω_1 או בתוכו. כיון שאורכו A_kA_i , A_kA_j ו A_iA_j קטנים או שווים ל d, הקשתות A_kA_i, A_kA_j ו A_iA_j קטנות או שוות ל- $60°$. נניח שהנקודה A_k נמצאת על הקשת $A_jA_kA_i$ בין A_i ו A_j.



כיון שהקוטר של קבוצת הנקודות שלנו הוא d. ברור שאם נעביר את המעגלים $\omega_k(A_k, d)$, $\omega_i(A_i, d)$ ו $\omega_j(A_j, d)$, נקבל כי הקבוצה של כל הנקודות הנתונות נמצאות במשולש עקום (על צלעותיו ובתוכו) אשר מוגבל על ידי ω_i , ω_1 ו w_j. הנקודה A_1 היא הנקודה היחידה המשותפת בין ω_k והמשולש, כלומר מהנקודה A_k יוצא קוטר אחד ויחיד A_kA_1. לכן בקבוצה של הנקודות הנתונות קיימת נקודה שממנה יוצא רק קוטר אחד.

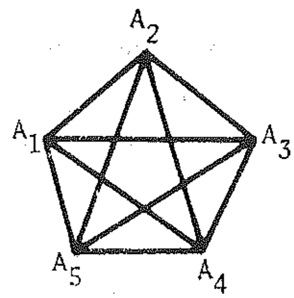
נסלק את הנקודה A_k מהקבוצה הנתונה. אזי נשארו $n - 1$ נקודות. לפי הנחת האינדוקציה, ישנם לכל היותר $n - 1$ קטעים שקצותיהם בנקודות הללו ואורכם d.

נוסיף ל- $n - 1$ הנקודות הללו, את הנקודה A_k שלה קוטר אחד בלבד. אזי ל- n הנקודות הנתונות ישנם לכל היותר $(n - 1) + 1 = n$ קוטרים.

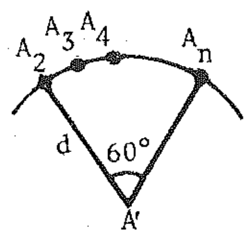
באופן דומה מוכיחים את המקרים בהם יוצאים מנקודה כלשהי יותר מ-3 קוטרים.

דוגמאות למקרים בהם מספר הקוטרים בקבוצה של n נקודות נתונות שווה בדיוק ל n :

1. מצולע משוכלל בעל $n = 2k + 1$ צלעות.



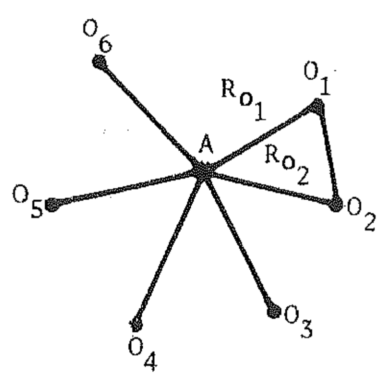
.2



$A_2, A_3, \ldots, A_n$ נמצאות על הקשת כמוסבר בשרטוט.

78. נסמן את הנקודה המשותפת ב A, את מרכזי המעגלים הנתונים ב 0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5, 0_6, והרדיוסים המתאימים: R_{0_1}, R_{0_2}, R_{0_3}, R_{0_4}, R_{0_5}, R_{0_6}.

נניח כי הטענה אינה נכונה, כלומר, נניח כי ניתן לבנות ששה עיגולים במישור, המכילים נקודה משותפת A, שמרכזו של כל עיגול הינו מחוץ לכל העיגולים האחרים.



נחבר את הנקודה A עם ששת המרכזים:

$0_1 - 0_6$.

לפי ההנחה מתקיים במשולש $A0_10_2$:

$$A0_1 < R_{0_1} < 0_10_2$$

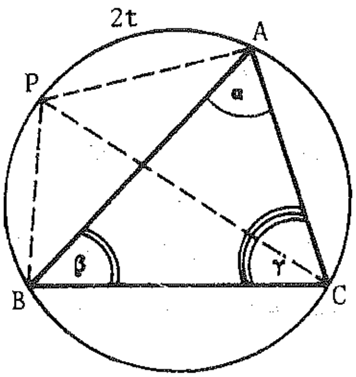
$$A0_2 < R_{0_2} < 0_10_2$$

כלומר, הצלע 0_10_2 היא הגדולה ביותר במשולש $A0_10_2$ ולכן:

$$\sphericalangle\, 0_1A0_2 > 60°$$

באותה דרך אפשר להוכיח כי גם חמש הזויות האחרות סביב הנקודה A, גדולות מ 60°. לכן סכום שש הזויות סביב הנקודה A גדול מ 360°, וזוהי סתירה.

79. <u>דרך I</u>



נסמן את הקשת $\widehat{AP}$ ב $2t$. אזי: $\widehat{PB} = 2\gamma - 2t$.

לפי משפט הסינוסים, במשולש APC מתקיים:

$$AP = 2R\sin t$$

במשולש PBC:

$$BP = 2R\sin(\gamma - t)$$

ו

$$PC = 2R\sin(\beta + t)$$

מכאן:

$$S = AP^2\sin 2\alpha + BP^2\sin 2\beta + CP^2\sin 2\gamma =$$

$$= 4R^2\sin^2 t\sin 2\alpha + 4R^2\sin^2(\gamma-t)\sin 2\beta + 4R^2\sin^2(\beta+t)\sin 2\gamma =$$

$$= 2R^2[(1-\cos 2t)\sin 2\alpha + ((1-\cos(2\gamma-2t))\sin 2\beta + (1-\cos(2\beta+2t))\sin 2\gamma] =$$

$$= R^2[2\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta + 2\sin 2\gamma - (2\cos 2t\sin 2\alpha + 2\cos(2\gamma - 2t)\sin 2\beta +$$

$$+ 2\cos(2\beta + 2t)\sin 2\gamma)]$$

נשתמש בנוסחה:

$$2\cos x\sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y)$$

ונפשט:

$$S = R^2[2\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta + 2\sin 2\gamma - \sin(2t+2\alpha) + \sin(2t-2\alpha) -$$

$$- \sin(2\gamma-2t+2\beta) - \sin(2\beta+2t+2\gamma)] =$$

$$= R^2[2\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta + 2\sin 2\gamma - \sin(2t+2\alpha) + \sin(2t-2\alpha) -$$

$$\sin(360^\circ - 2\alpha - 2t) - \sin(360^\circ - 2\alpha + 2t)]$$

$$= 2R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

כלומר, הסכום אינו תלוי ב t, ולכן אינו תלוי במצב של הנקודה P.

דרך II

נשים בקודקודים A, B, C מסות שוות ל- $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$ בהתאמה.
יהיה X מרכז הכובד של המסות האלה. לפי משפט כללי. יש לנו:

$$AP^2\sin 2\alpha + BP^2\sin^2\beta + CP^2\sin 2\gamma$$

$$= AX^2\sin^2\alpha + BX^2\sin^2\beta + CX^2\sin^2\gamma + (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)XP^2$$

נשאר איפוא להוכיח כי X מתלכד עם מרכז המעגל החוסם את המשולש.

80. נסמן ניצבי המשולש ב a, b והיתר ב c .

לפי נוסחאות של שטח המשולש קיים:

$$\frac{1}{2}ch = pr \qquad \text{(p-מחצית היקף המשולש)}$$

או: $$\frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}(a + b + c)r$$

מכאן

$$\frac{h}{r} = \frac{a + b + c}{c} = \frac{a + b}{c} + 1 \qquad (1)$$

כיון ש $a + b > c$ נקבל: $\frac{a + b}{c} > 1$. כלומר: $\frac{h}{r} > 2$

ו $$\frac{r}{h} < 0.5 \qquad (2)$$

מצד שני:

$$\frac{(a + b)^2}{c^2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$$

כיון ש: $$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

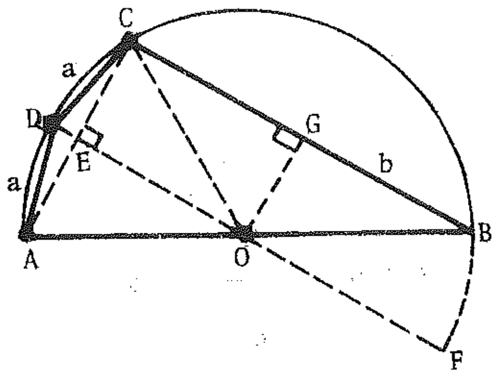
ולכן: $$\frac{(a + b)^2}{c^2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = 2$$

מכאן: $$\frac{a + b}{c} \leq \sqrt{2}$$

מ (1) נקבל: $$\frac{h}{r} \leq \sqrt{2} + 1$$

או: $$\frac{r}{h} \geq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

ולסיכום: $$\sqrt{2} - 1 \leq \frac{r}{h} \leq 0.5$$



81. מרובע ADCO הוא דלתון.

לכן: $DO \perp AC$

זוית $\measuredangle ACB$ היא זוית ישרה

כי: AB הוא קוטר.

מכאן: $BC \parallel OE$.

נסמן את DE ב x, אזי:

$$CE = \sqrt{a^2 - x^2}$$

C נמצאת על המעגל ו $CE \perp DF$ (קוטר)

לכן:

$$CE^2 = DE \cdot EF$$

$$a^2 - x^2 = x(d - x)$$

$$a^2 - x^2 = dx - x^2$$

$$x = \frac{a^2}{d}$$

$$OE = OD - DE$$

$$OE = \frac{d}{2} - \frac{a^2}{d}$$

נבנה $OG \perp CB$. אזי: $CG = \frac{b}{2}$ ו- $CG = OE$, כלומר:

$$\frac{d}{2} - \frac{a^2}{d} = \frac{b}{2}$$

$$d^2 - bd - 2a^2 = 0$$

$$d = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 8a^2}}{2}$$

כיון ש $d > 0$ נקבל כי: $d = \frac{b + \sqrt{b^2 + 8a^2}}{2}$.

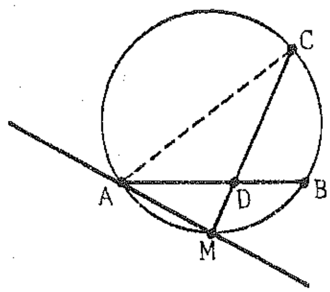
82. $\measuredangle ACM = \measuredangle MCB$ (כי $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$)

$\measuredangle AMC = \measuredangle CBA$ (נשענות על $\overset{\frown}{AC}$)

$$\Downarrow$$

$$\Delta ACM \sim \Delta DCB$$

$$\Downarrow$$



$$\frac{AM}{CM} = \frac{DB}{CB} \qquad (1)$$

$$\Delta AMD \sim \Delta CBD$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DB}{CB} = \frac{MD}{AM} \qquad (2)$$

מ (1) ו (2):

$$\frac{AM}{MC} = \frac{MD}{AM}$$

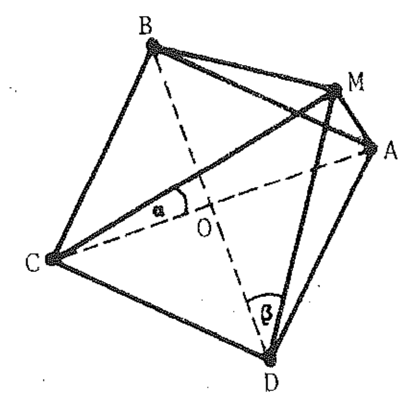
$$\Downarrow$$

$$AM^2 = MC \cdot MD$$

כלומר AM הוא משיק למעגל העובר דרך נקודות A, C ו D.

83. AC ו BD הם קוטרים במעגל.

במשולש AMC מתקיים:



$$AM = 2R\sin \measuredangle MCA \qquad (1)$$

$$CM = 2R\cos \measuredangle MCA \qquad (2)$$

במשולש BMD מתקיים:

$$DM = 2R \cdot \cos \measuredangle BDM \qquad (3)$$

$$BM = 2R \sin \measuredangle BDM \qquad (4)$$

מ (1) ו (2) נקבל:

$$AM^2 + CM^2 = 4R^2 \qquad (5)$$

מ (8) ו (4) נקבל:

$$BM^2 + DM^2 = 4R^2 \qquad (6)$$

נעלה בריבוע את (5) ו (6) ונקבל:

$$AM^4 + CM^4 + 2AM^2 \cdot CM^2 = 16R^4$$

$$BM^4 + DM^4 + 2BM^2 \cdot DM^2 = 16R^4$$

מכאן:

$$AM^4 + CM^4 + BM^4 + DM^4 = 32R^4 - 2(AM^2 \cdot CM^2 + BM^2 \cdot DM^2)$$

$$= 32R^4 - 2(16R^4\sin^2 \sphericalangle MCA\cos^2 \sphericalangle MCA + 16R^4\sin^2 \sphericalangle BDM\cos^2 \sphericalangle BMD)$$

$$= 32R^4 - 8R^4(\sin^2 2 \sphericalangle MCA + \sin^2 2 \sphericalangle BDM)$$

$$= 24R^4$$

השוויון האחרון נובע מהשוויון:

$$\sin^2 2 \sphericalangle MCA + \sin^2 \sphericalangle BDM = 1$$

שכן: $2\sphericalangle MCA + 2\sphericalangle BDM = 90°$

לכן: $\sin 2 \sphericalangle BDM = \cos 2 \sphericalangle MCA$

כלומר:

$$\sin^2 2 \sphericalangle MCA + \sin^2 2 \sphericalangle BDM = \sin^2 2 \sphericalangle MCA + \cos^2 2 \sphericalangle MCA = 1 \;.$$

84. א) ראשית נוכיח כי AQD ו BRD הם ישרים.

$DC \perp AB$, לכן $\triangle ADC$ דומה ל- $\triangle DCB$.

מכאן: $DC = \sqrt{xy}$.

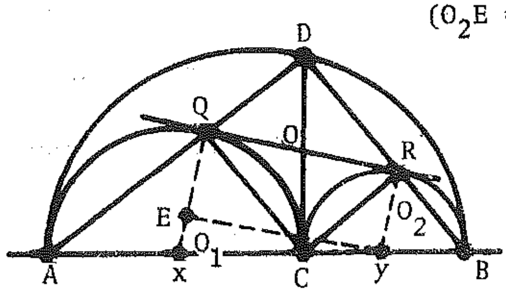
O_1EO_2 משולש ישר זווית. מכאן נובע כי

$O_2E = \sqrt{xy}$ (כי $O_2E = \sqrt{O_1O_2^{\,2} - O_1E^2}$)

אך: $QR = O_2E$

מכאן:

$$QR = DC = \sqrt{xy}$$



כלומר במרובע CQDR האלכסונים שווים.

בנוסף לכך $OC = OQ = OR = OD = \frac{1}{2}\sqrt{xy}$.

מכאן, המרובע CQDR הוא מלבן, ו $\sphericalangle CQD = 90°$.

כיון שגם $\sphericalangle AQC = 90°$ (זוית היקפית הנשענת על קוטר AC),

נקבל כי: AQD הוא ישר. בדרך דומה נוכיח כי BRD - ישר .

ב) $$\frac{S_{\Delta DQR}}{S_{\Delta DAB}} = \frac{\frac{1}{2}DQ\cdot DR}{\frac{1}{2}AD\cdot DB} = \frac{DQ}{AD}\cdot\frac{DR}{DB}$$

לפי משפט תלס:

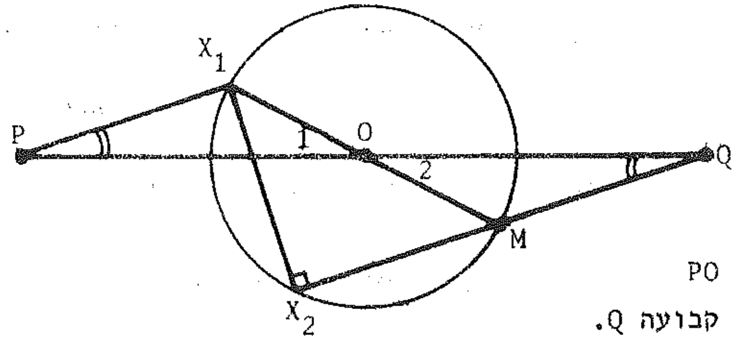
$$\frac{DQ}{AQ} = \frac{y}{x} \implies \frac{DQ}{AD} = \frac{y}{x+y} \qquad (2)$$

$$\frac{DR}{RB} = \frac{x}{y} \implies \frac{DR}{DB} = \frac{x}{x+y} \qquad (3)$$

מ- (1), (2), (3) נובע:

$$\frac{S_{\Delta DQR}}{S_{\Delta DAB}} = \frac{xy}{(x+y)^2}$$

85. תהי P נקודת החיתוך של הניצבים לישרים הנתונים בנקודות X_1, Y_1, Z_1 ו T_1.
נוכיח כי הניצב לישר ℓ_1 בנקודה X_2, חותך את הישר PO (O - מרכז המעגל) בנקודה קבועה Q.



נסמן ב M את נקודת החיתוך של הניצב בנקודה X_2, עם המעגל.

M, X הוא קוטר במעגל שכן $X_1X_2 \perp X_2M$

אזי $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$

וגם $\sphericalangle P = \sphericalangle Q$, שכן $PX_1 \parallel QX_2$

ולכן $\Delta PX_1O \sim \Delta QMO$

מכאן $\frac{PO}{QO} = \frac{X_1O}{MO} = 1$

ואז $QO = PO$

כיון ש-P ו-O קבועות, נובע שגם נקודות החיתוך Q קבועה, ובה נחתכים כל הניצבים לישרים הנ"ל בנקודות X_2, T_2, Z_2, T_2.

86. נסמן ב O את מרכז המעגל וב O_1 את אמצע OZ.
RO_1 - תיכון של המשולש ROZ.
ראשית נוכיח כי

$$RO_1^{\ 2} = \frac{1}{2}(RZ^2 + RO^2) - \frac{1}{4}OZ^2 \qquad (1)$$

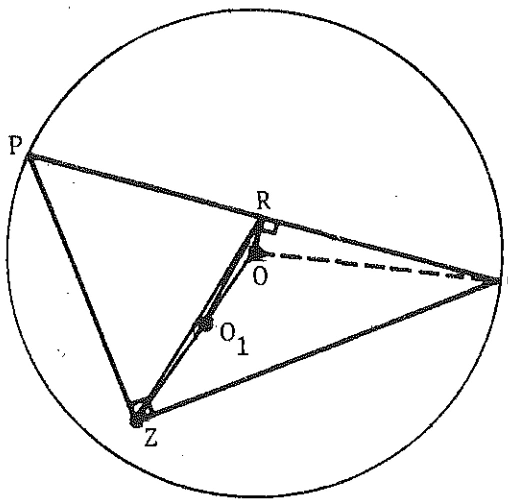
לשם כך נשלים את המשולש RZO למקבילית RZKO (ראה ציור). לפי משפט על אלכסוני מקבילית נקבל

$$RK^2 + ZO^2 = 2RZ^2 + 2RO^2$$

$$(2RO_1)^2 + ZO^2 = 2RZ^2 + 2RO^2$$

מכאן

$$RO_1^{\ 2} = \frac{1}{2}(RZ^2 + RO^2) - \frac{1}{4}OZ^2$$



משולש ZRQ הינו ישר זווית ו R אמצע היתר, לכן RZ = RQ.

נציב ב (1) RQ במקום RZ ונקבל

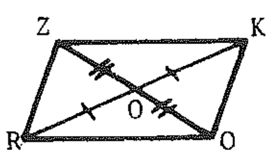
$$RO_1^{\ 2} = \frac{1}{2}(RQ^2 + RO^2) - \frac{1}{4}OZ^2$$

במשולש ישר הזווית ORQ מתקיים:

$$RQ^2 + RO^2 = OQ^2$$

OQ - רדיוס המעגל.

מכאן



$$RO_1^{\ 2} = \frac{1}{2}OQ^2 - \frac{1}{4}OZ^2$$

כיוון שבמעגל נתון OQ, Z, O ו O_1 הם קבועים, אזי גם RO_1 קבוע. מכאן המקום ההנדסי המבוקש הוא מעגל שמרכזו O_1 ורדיוסו $\sqrt{\frac{1}{2}OQ^2 - \frac{1}{4}OZ^2}$

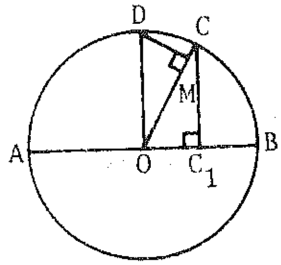
87. נעלה אנך OD ל AB ונחבר D עם M (ראה הציור).

המשולשים OCC' ו DOM חופפים ($OM = CC'$, $OD = OC$ ו $\sphericalangle DOM = \sphericalangle OCC'$)

כיון שהמשולש OCC' הוא ישר זוית, אזי גם המשולש DOM הוא ישר זוית ו $\sphericalangle OMD = 90°$.

מכאן נובע כי הנקודה M נמצאת על המעגל שקוטרו OD .

לכן המקום המבוקש הוא שני מעגלים - האחד הוזכר לעיל והשני סימטרי לו ביחס ל AB .

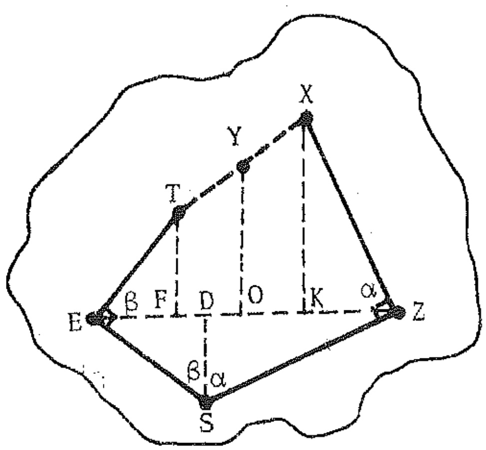


88. נעביר $XK \perp EZ$, $YO \perp EZ$, $TF \perp EZ$ ו $SD \perp EZ$. קל לראות כי: $\Delta ZKX \cong \Delta SDZ$ ו $\Delta EFT \cong \Delta SDE$.

מכאן:

$ED = TF$, $DZ = XK$

ו $EF = DS = KZ$



אזי:

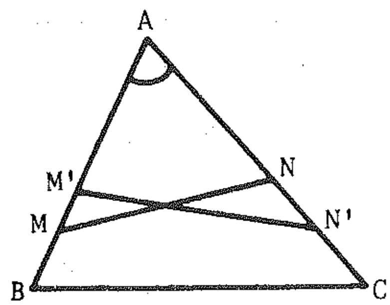
$EZ = XK + FT$

וכיון ש YO הוא קטע האמצעים של הטרפז FTXK, גם $EO = OZ$ ו $YO = \frac{1}{2}EZ$.

כלומר ניתן למצוא את הנקודה Y.

(מאמצע EZ, כלומר מהנקודה O, נעלה אנך OY ל EZ, כך ש $OY = \frac{1}{2}EZ$. הנקודה Y היא הנקודה המבוקשת).

89. I. בתחילה נבנה משולש $A'M'N'$ כך ששטחו יהיה מחצית משטחו של המשולש ABC.
נסמן את צלעות המשולש ABC
ב a, b ו c.
צלעותיו של משולש המבוקש AMN
יהיו בהתאמה a', b' ו c'.



אזי:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc\ \sin A$$

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}b'c'\sin A$$

וגם:

$$\frac{1}{2}bc\ \sin A = b'c'\sin A$$

$$\frac{1}{2}bc = b'c'$$

מכאן: $$c' = \frac{0.5b\cdot c}{b'}$$

אם נבחר קטע כלשהו ונסמן את אורכו ב b', אזי נוכל לבנות את הקטע c' בהתאם לשלושת הקטעים: $0.5b$, c ו b' (בעיית בניה פשוטה).
עתה, אם נקצה על AC, מהנקודה A, את הקטע הנבחר b', ועל AB את הקטע הבנוי c', נקבל משולש $AM'N'$ ששטחו שווה למחצית השטח של המשולש ABC.

II. בין כל המשולשים מסוג $\Delta AM'N'$ (יש אינסוף אפשרויות לבחירת b', ולכן ניתן לבנות אינסוף משולשים ששטחם שווה למחצית שטח המשולש ABC), נמצא את המשולש שבו אורך הקטע $M'N'$ יהיה מינימלי.
נניח ש- ΔAMN הוא המשולש המבוקש. נסמן $AM = x$ ו- $AN = y$.

אזי: $$\frac{1}{2}xy\sin A = \frac{1}{2}b'c'\sin A$$

$$xy = b'c' = \frac{1}{2}bc \qquad (1)$$

לפי משפט הקוסינוסים:

$$MN^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos A$$

אם MN^2, בעל אורך מינימלי, אז גם $x^2 + y^2$ הינו מינימלי כי: $2xy\cos A = bc\cos A$ הוא קבוע.

מכאן, במקום למצוא את הערך המינימלי של MN^2, אפשר למצוא את הערך המינימלי של $x^2 + y^2 - 2xy$ כלומר של $(x - y)^2$. אך $(x - y)^2 \geq 0$.
מכאן הערך המינימלי של $x^2 + y^2 - 2xy$ יהיה כאשר: $x = y$.
מכאן, הערך המינימלי של MN יהיה כאשר $x = y$.

לפי (1) נקבל:

$$x^2 = 0.5bc$$

וגם

$$x = y = \sqrt{0.5bc} \qquad (2)$$

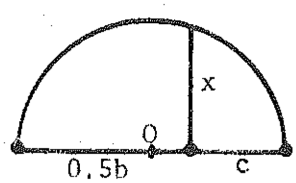
מכאן המשולש המבוקש הוא משולש שווה שוקיים שאורך צלעותיו:

$$AM = AN = x = y = \sqrt{0.5bc}$$

$$MN = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos A} = \sqrt{\tfrac{1}{2}bc - bc\cos A}$$

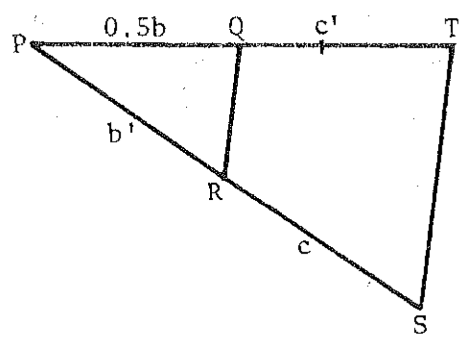
הערה: 1) קל לבנות את הקטע: $x = y = \sqrt{0.5bc}$

לדוגמא:



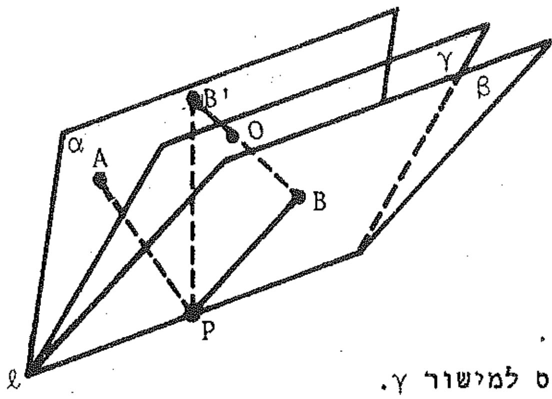
2) קל לבנות את הקטע: $c' = \dfrac{0.5b\ c}{b'}$

לדוגמא:



$QR \parallel ST$

90. <u>ניתוח</u>

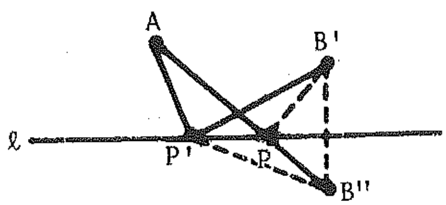


נניח כי פתרנו את הבעיה ומצאנו את הנקודה P. נבנה מישור α העובר דרך ℓ ו A ומישור β העובר דרך ℓ ו B.

נבנה מישור γ החוצה את הזוית (α, β).
נבנה נקודה B' אשר סימטרית ל- B ביחס למישור γ.

מכאן $B'P = BP$ והסכום המבוקש שווה לסכום: $AP + PB'$.
ברור ש B', A ו ℓ נמצאים במישור אחד α. באופן כזה במקום לפתור את הבעיה במרחב, נוכל לפתור אותה במישור:

במישור α נתון ישר ℓ ושתי נקודות A ו B'.
יש למצוא על הישר ℓ נקודה P, כך ש:
$AP + PB'$ יהיה מינימלי.



כדי לפתור בעיה זו בונים B'' הסימטרית ל- B' ביחס ל ℓ ומחברים A עם B''. נקודת החיתוך של AB'' ו ℓ היא הנקודה המבוקשת P.

(ברור כי $AP + PB' = AP + PB'' < AP' + P'B'$

כי: $AB'' < AP' + P'B''$)

<u>בנייה</u>:

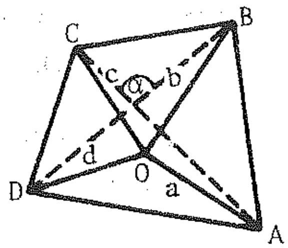
א. בונים מישור α העובר דרך ℓ ו A
ב. בונים מישור β העובר דרך ℓ ו B
ג. בונים מישור γ החוצה את הזוית (α, β)
ד. בונים את הנקודה B' הסימטרית ל B ביחס למישור γ.
ה. אם הנקודות B' ו A נמצאות בצד אחד של הישר ℓ, בונים B'' הסימטרית ל B' ביחס לישר ℓ. נקודת החיתוך של AB'' ו ℓ היא הנקודה המבוקשת P.
אם A ו B' נמצאות בצדדים שונים של ℓ, אזי נחבר A ו B'. נקודת החיתוך של AB' ו ℓ היא הנקודה המבוקשת.

<u>הערה</u>: לבעיה זו יש תמיד פתרון והוא יחיד, שכן הבניות א-ה אפשריות באופן יחיד.

91. <u>ניתוח</u>

יהיה ABCD המרובע המבוקש, AC ו BD אלכסוניו.

ברור כי:



$BD < b + d$ ו $AC < a + c$

שטח המרובע שווה ל- $\frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\alpha$.

השטח יהיה מכסימלי אם $\alpha = 90°$

ואם המכפלה $AC \cdot BD$ תהיה המכסימלית.

לשם כך, יש לבחור זוגות של קטעים,

מבין $a > b > c > d$, כך שמכפלת

סכומיהם תהיה מכסימלית.

קיימות האפשרויות הבאות:

(1) $(a + d)(b + c)$

(2) $(a + c)(b + d)$

(3) $(a + b)(c + d)$

נוכיח כי:

$$(a + d)(b + c) > (a + c)(b + d) > (a + b)(c + d)$$

$$(a + d)(b + c) - (a + c)(b + d) =$$

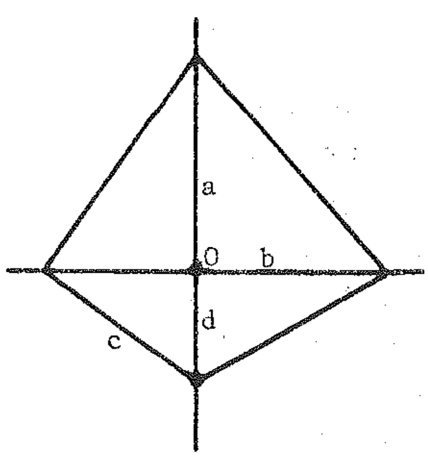
$$= (a - b)(c - d) > 0$$

מכאן: $(a + d)(b + c) > (a + c)(b + d)$

באותה דרך נוכיח כי:

$$(a + c)(b + d) > (a + b)(c + d)$$

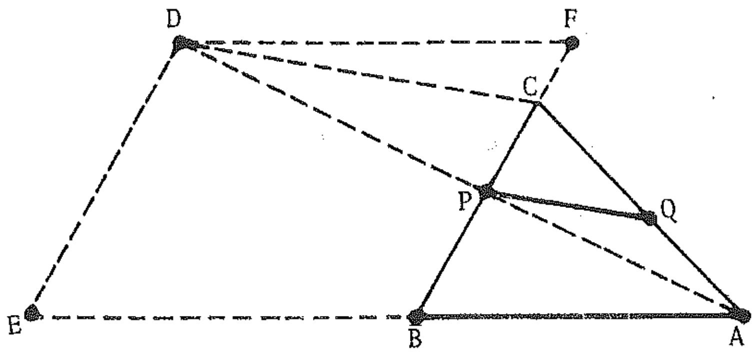
<u>בנייה</u>



דרך הנקודה O נעביר שני ניצבים. על אחד מהם נקצה את הקטעים a ו d משני צידי O, ועל הניצב השני נקצה את הקטעים b ו c משני צידי O. נחבר את קצות הקטעים ונקבל את המרובע המבוקש.

92. <u>ניתוח</u>

נניח שהנקודה P היא הנקודה המבוקשת, כלומר AQ = PQ = PB.
נבנה צורה הומוטטית לצורה AQPB באופן הבא:
דרך הנקודה C נעביר ישר המקביל ל PQ עד שיחתוך את המשכו של AP בנקודה D.
דרך הנקודה D נעביר ישר DE, BC || DE. התקבלה הצורה ACDE שהיא הומוטטית לצורה AQPB.



מכאן ברור שאם נבנה את הצורה ACDE, נוכל למצוא את הנקודה P כנקודת חיתוך של AD ו CB. נראה כיצד ניתן לבנות את הנקודה D.
כיון ש ACDE הומוטטית ל AQPB, אזי AC = CD = DE (כי AQ = QP = PB). מכאן, הנקודה D נמצאת על המעגל שמרכזו C ורדיוסו AC.
בנוסף לכך, הנקודה D נמצאת על DE ששווה ל AC ומקביל ל BC. לכן ניתן למצוא את הנקודה D באמצעות הבניה הבאה:

<u>בניה</u>

נשרטט מעגל שמרכזו בנקודה C ורדיוסו AC. על הישר BC החל מ B נקצה קטע BF השווה ל DE (כלומר ל AC). נעביר מ-F מקביל ל AB. נקודת החיתוך של המעגל והמקביל היא הנקודה D.
עתה נעביר את AD. AD יחתוך את BC בנקודה P המבוקשת.

הערה: לבעיה ישנם שני פתרונות - אם מרחק הנקודה C מהישר FD קטן מ AC, פתרון אחד - אם המרחק שווה ל AC, ואין פתרון - אם המרחק גדול מ AC.

93. <u>ניתוח</u>

נניח שבנינו משולש ABC מבוקש.

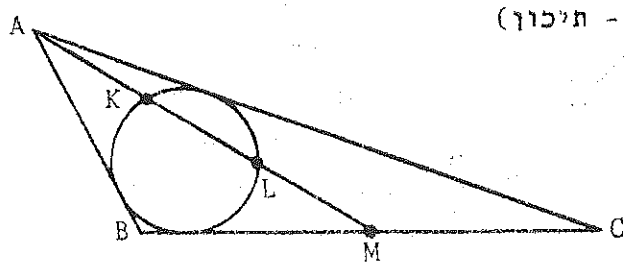
נסמן את נקודות ההשקה ב-D, E ו-F, ואת הקטעים AK ב-x ו BE ב-y .

עתה נביע את צלעות המשולש ABC באמצעות y.

מתכונות של משיקים למעגל נקבל כי:

$AD^2 = AF^2 = ME^2 = 2x^2$ מכאן: $AD = AF = ME = x\sqrt{2}$ ו $AB = y + x\sqrt{2}$.

לכן:



$BM = MC = x\sqrt{2} + y$ (AM - תיכון)

$CE = CF$ ולכן: $AC = y + 3x\sqrt{2}$

$BC = 2y + 2x\sqrt{2}$

נשלים את המשולש למקבילית.

מהמשפט על אלכסוני מקבילית נקבל:

$$BC^2 + (2AM)^2 = 2AB^2 + 2AC^2$$

$$(2y + 2x\sqrt{2})^2 + 36x^2 = 2(y + x\sqrt{2})^2 + 2(y + 3x\sqrt{2})^2$$

מכאן: $x = 2y\sqrt{2}$

ו: $AB = 5y$, $AC = 13y$ ו $BC = 10y$

כלומר, צלעות המשולש מקיימות את היחס: $AB:AC:BC = 5:13:10$

לא קשה לבדוק כי קיים לפחות משולש אחד שצלעותיו נמצאות ביחס 5:13:10.

מכאן נעבור לבניה הנדרשת:

<u>בנייה</u>

א) נבנה משולש כלשהו A'B'C' שיחס צלעותיו הוא 5:13:10.

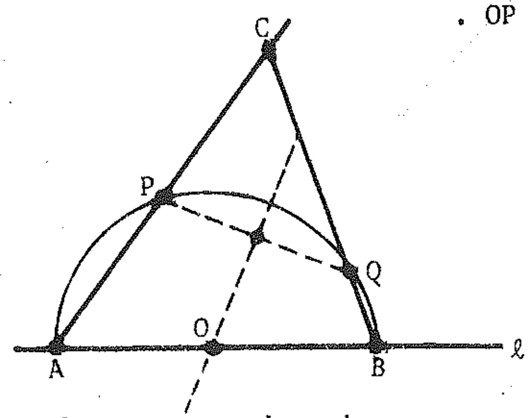
ב) נמצא את מרכז המעגל החסום במשולש זה. נסמן את רדיוסו ב-r'.

ג) נבנה משולש ABC הומותטי למשולש A'B'C' כשמרכז ההומותטיה הוא מרכז המעגל O' ויחס ההומותטיה הוא $\frac{r}{r'}$ (r - רדיוסו של המעגל הנתון).

ABC הוא המשולש המבוקש.

94. דרך I

נעביר את האנך האמצעי ל PQ ונסמן את נקודת החיתוך של אנך זה עם הישר ℓ ב O . נעביר מעגל שמרכזו O ורדיוסו OP = OQ .



נסמן את נקודות החיתוך של מעגל זה עם הישר ℓ ב-A ו-B - אלו הם הקודקודים של המשולש המבוקש.

הקודקוד השלישי, C , נתקבל כנקודת החיתוך של AP ו-BQ .

<u>הערה:</u> אם PQ אינו מאונך ל ℓ , תמיד יהיה פתרון לבעיה, ופתרון זה יחיד.

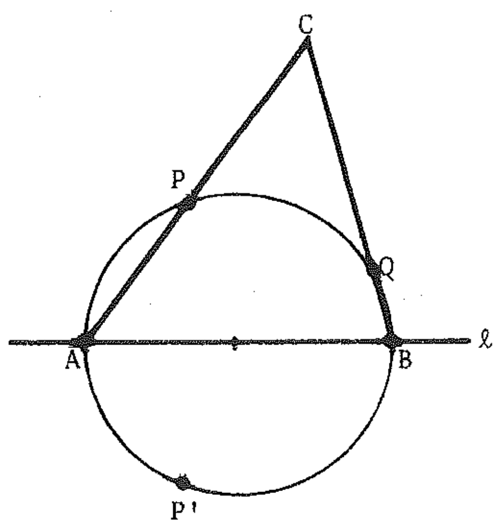
דרך II

נבנה את הנקודה 'P הסימטרית ל P ביחס ל ℓ .

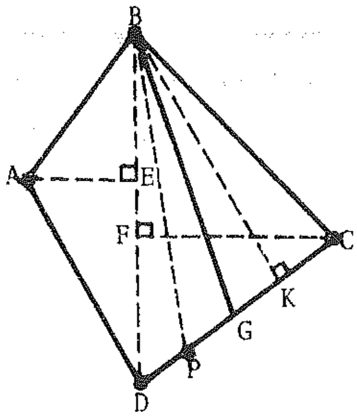
דרך P, 'P ו Q נעביר מעגל שיחתוך את הישר ℓ בנקודות A ו B .

A ו B הם שני קודקודיו של המשולש המבוקש.

הקודקוד השלישי, C יתקבל כנקודת החיתוך של AP ו BQ .



95. ניתוח



האלכסון BD מחלק את המרובע ABCD
לשני משולשים . נניח כי:

$$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BDC}$$.

כדי לפתור את הבעיה מספיק להעביר
ישר BG כך שיתקיים:

$$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BCG} \qquad (1)$$

ואחר-כך לחלק את שטח המשולש BDG
לשני משולשים שווי-שטח.

את שוויון (1) ניתן לרשום בצורה הבאה:

$$\frac{1}{2}BD \cdot AE = \frac{1}{2}CG \cdot BR$$

או:

$$BD \cdot AE = CG \cdot BK \qquad (2)$$

BD, AE ו BK הינם גדלים קבועים כיון שהמרובע ABCD נתון.
לכן עלינו לבנות את הקטע CG כך שיתקיים שוויון (2). אחר כך נעביר את התיכון BP, והוא יחלק את שטח המשולש DBG לשני משולשים שווי-שטח.

כלומר, BP הוא הישר המבוקש.

תיאור הבניה

1. נבנה קטע CG כך ש:

$$CG = \frac{BD \cdot AE}{BK}$$

2. נחלק את DG לשני חלקים שווים ונמצא את הנקודה P .

3. נעביר את הישר BP .

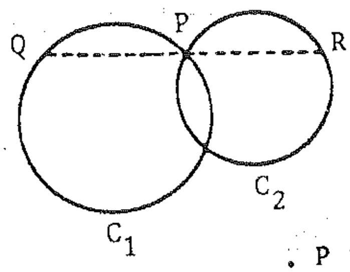
מכאן:

$$S_{ABPD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBP} = S_{\Delta BCG} + S_{\Delta GBP} = S_{\Delta PBC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

לפי תיאור הבניה, ברור כי לבעיה ישנו תמיד פתרון אחד ויחיד.

96. <u>ניתוח</u>

יהיה QPR הישר המבוקש. אזי $QP = PR$ כלומר הנקודות R ו Q הן סימטריות לגבי המרכז P (P - הנקודה הנתונה). מכאן נובע כי Q נמצאת על מעגל C'_2 הסימטרי למעגל C_2 לגבי המרכז P.



מצד שני נתון כי Q נמצאת על C_1.
מכאן, הנקודה Q היא נקודת חיתוך של C_1 ו C'_2 .

<u>בנייה</u>

1. בונים C'_2 סימטרי ל- C_2 לגבי המרכז P .
2. נסמן ב Q את נקודת החיתוך של C'_2 ו C_1 , השונה מ- P.
3. נעביר ישר דרך P ו Q ונקבל את R .

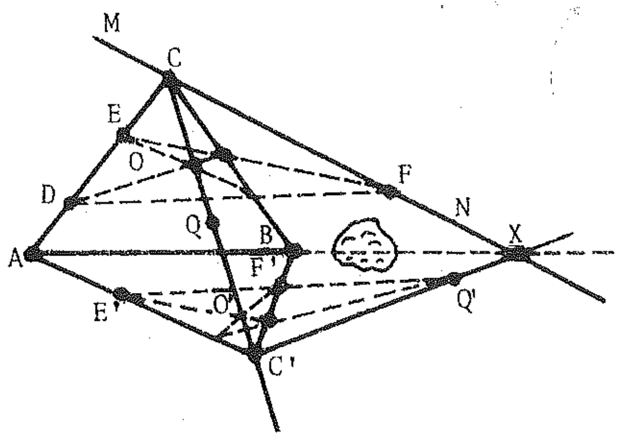
<u>הוכחה</u>

1. הישר QPR עובר דרך P (לפי הבניה).
2. Q נמצאת על C'_2. לכן R היא המקור של Q על המעגל C_2.
3. Q ו R סימטריות לגבי המרכז P , לכן $QP = PR$.

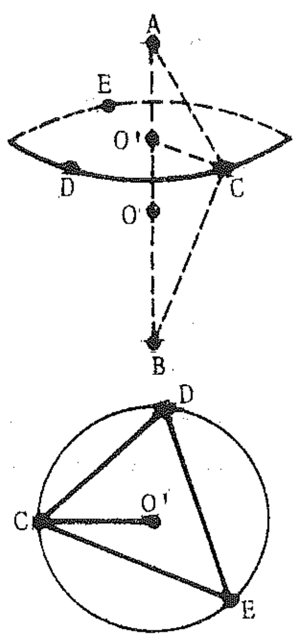
<u>חקירה</u>

לבעיה יש תמיד פתרון והוא יחיד, שכן תמיד ניתן לבנות C'_2 והוא יחיד.
כמו כן ל C'_2 ול C_1 יש שתי נקודות חיתוך: האחת P והשניה Q .
(לא יתכן שתהיה להם נקודת מגע אחת בלבד, שכן אז גם ל- C_2 ול- C_1 היתה נקודת מגע אחת, בסתירה לנתונים).

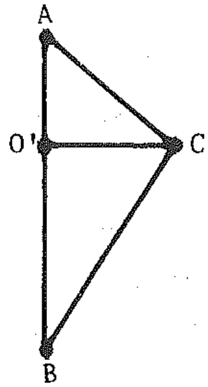
97. נבנה ישר MN, אשר נקודת החיתוך שלו עם המשך AB תימצא מימין למשטח.
נבנה ישר CQ הקשור הרמונית בישר MN, ביחס לישרים CA ו CB (ראה הציור).
נבחר נקודה כלשהי C' על הישר CQ, ונבנה C'Q' הקשור הרמונית בישר CQ, ביחס לישרים C'A ו C'B (ראה הציור).
נקודת החיתוך X של הישרים MN ו C'Q' היא נקודה הנמצאת על המשך AB מימין למשטח. באותה דרך ניתן למצוא נקודה נוספת Y על ההמשך הימני של AB.
דרך X ו Y נוכל לבנות את ההמשך הימני של AB .



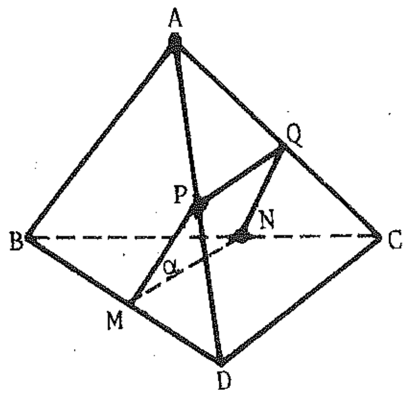
98. מנקודה כלשהי A על הכדור כמרכז, נעביר על הכדור מעגל כלשהו, נסמן את מרכזו ב-O'.
נסמן על המעגל שלוש נקודות כלשהן C, D ו E . באמצעות המחוגה נמדוד את המרחקים CD, DE ו CE ונסרטט את הקטעים CD, DE ו CE על הנייר.
משלושת הקטעים הללו נבנה על הנייר משולש CDE ונחסום אותו במעגל.
ברור שמעגל זה חופף למעגל שמרכזו O'. O'C הוא רדיוסו, כלומר, הקטע CO' שבבנינו הוא האנך CO' המורד מהנקודה C שעל הכדור לקוטר AB.



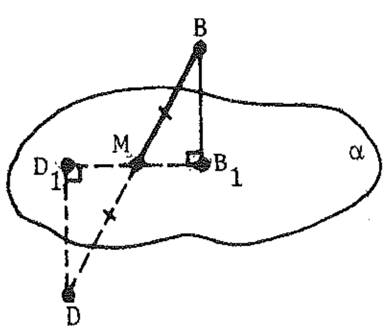
עתה, ידועים לנו אורך היתר AC ואורך הניצב CO' במשולש ישר הזוית AO'C. לכן, נוכל לבנות את המשולש.



מהנקודה C נעביר אנך ל AC. הוא
יחתוך את המשך O'A בנקודה שנסמנה B.
AB הוא הקוטר של הכדור.



99. נחבר את ארבע הנקודות שבציור ונקבל
פירמידה משולשת.
דרך נקודת האמצע M של המקצוע BD,
נעביר שני ישרים: MN || CD
(N נמצא על BC) ו MP || AB
(P נמצא על AD).
דרך MP ו MN נעביר מישור MPQN.
מישור זה הוא המישור המבוקש.
A ו B נמצאים בצידו האחד ו C, D
בצידו השני, שכן MPQN חותך את
BD, AD, BC ו AC .
לפי הבניה DC || MN, לכן DC מקביל
למישור MPQN, כמו כן, MP || AB,
לכן AB מקביל למישור MPQN. כלומר,
הנקודות C ו D נמצאות במרחקים
שווים מ MPQN, וגם הנקודות A ו B
נמצאות במרחקים שווים מ MPQN .



עתה נוכיח שמרחקים אלו שווים זה לזה.
נסמן את המישור הנקבע על ידי MPQN
ב α. נוריד מהנקודות B ו D אנכים
BB_1 ו DD_1 למישור α.
המשולשים MBB_1 ו MDD_1 חופפים שכן
הם משולשים ישרי זוית, MB = MD
(לפי הבניה) ו $\sphericalangle BMB_1 = \sphericalangle DMD_1$
(זויות קודקודיות).
מכאן המרחק של B מ α שווה למרחק
של D מ α .

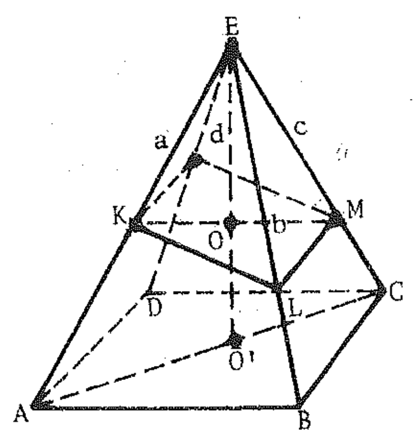
100. המשולשים $A'DB$ ו $C'B'D$ הם שווי צלעות היוצרים מישורים מקבילים, כי:
$D'C \parallel A'B$ ו $B'C \parallel A'D$ (ראה שרטוט בעמוד 23).

אם נעביר מישור α דרך הנקודות S, R, Q הוא יהיה מקביל למישורים $A'DB$
ו $D'B'C$ כי $SR \parallel B'D'$ ו $RQ \parallel D'C$.

החיתוך של הפאה $BB'C'C$ עם α הוא QP. שכן החיתוך של מישור $(BB'C'C)$
עם שני מישורים מקבילים (α ו $D'B'C$) הוא שני ישרים מקבילים ($B'C$ ו QF).
לפי אותו משפט ניתן להוכיח כי החיתוך של α עם הפיאה $ABCD$ הוא הישר UP,
עם הפאה $DD'C'C$ - הישר TU, ועם הפאה $AA'D'D$ - הישר ST.

כלומר, הוכחנו כי הנקודות U, T, S, R, Q, P נמצאות במישור אחד - α
ויוצרות משושה.
עתה נוכיח כי זהו משושה משוכלל.
צלעותיו שוות כי כל אחת מהן שווה למחצית האלכסון של פאת הקוביה, לדוגמא:
$SR = \frac{1}{2}D'B'$. (כקטע האמצעים של המשולש $A'D'B'$). כל זויותיו שוות
ל- $120°$ כי צלעותיו מקבילות לצלעות המשולש שווה הצלעות - $D'B'C$.
לכן, המשושה $SRQPUT$ הוא משושה משוכלל.

101. נעביר גובה EO' של הפירמידה.



O - נקודת החיתוך של EO' עם
המישור $KLMW$.

נסמן את $\measuredangle KEO$ ב α, אזי:

$$\measuredangle KEO = \measuredangle OEM = \measuredangle NEO = \measuredangle OEL = \alpha$$
(הפירמידה ישרה).

ברור כי:

$$S_{\Delta KEM} = S_{\Delta KEO} + S_{\Delta OEM}$$

כלומר:

$$\frac{1}{2}ac\sin2\alpha = \frac{1}{2}a\cdot EO\sin\alpha + \frac{1}{2}c\cdot EO\ \sin\alpha$$

מכאן:

$$\frac{2\cos\alpha}{h} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \quad (1)$$

באותה דרך:

$$S_{\Delta NEL} = S_{\Delta NEO} + S_{\Delta OEL}$$

ונקבל:

$$\frac{2\cos\alpha}{h} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d} \qquad (2)$$

מ (1) ו-(2) נובע: $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

102. במישור (ADC) נעביר PR || AD

במישור (ABC) נעביר RT || BC

אזי חיתוך המישור שעובר דרך PR ו RT עם הפאה BCD, הוא הקטע PS המקביל ל BC. החיתוך של המישור הנ"ל עם הפאה ADB הוא קטע ST המקביל ל AD.

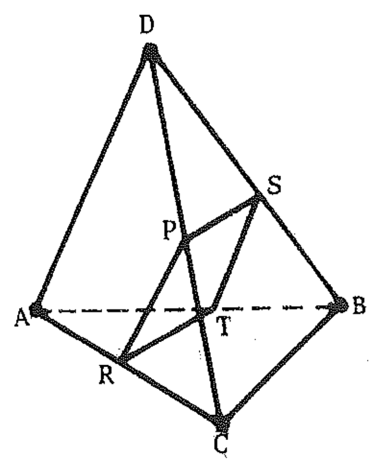
כמו כן, PR || AD || ST ו RT || BC || PS. אזי החתך RPST הוא מקבילית. המשולש DBC הוא משולש שווה צלעות לכן גם משולש DPS, הוא שווה צלעות, כלומר PS = DP.

שקול דומה מביא ל- RP = PC

מכאן $PS + RP = DC$

ו $2(PS + RP) = 2DC = 2a$

כלומר, ההיקף של החתך הוא קבוע ולכן לא תלוי במיקום הנקודה P על המקצוע CD.



103. דרך I

$$(1) \qquad a\cos\alpha + b\sin\alpha = c$$

$$(2) \qquad a\cos\beta + b\sin\beta = c$$

נחבר ונחסר משוואות (1) ו (2), ונקבל:

$$(3) \qquad a\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = c$$

$$(4) \qquad -a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

כיון ש $\alpha \neq \beta$ ו $0 < \alpha < \pi$ ו $0 < \beta < \pi$ אזי,

$\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$ ו $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha-\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, ואז $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$

לכן נקבל מ (4):

$$(5) \qquad a\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \pi$ לכן $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$. ($\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ יכול להיות 0).

מ- (5) ברור כי $b \neq 0$ כי אילו היה $b = 0$, אזי גם $a = 0$ וזה לא יתכן.

מ- (5) נקבל: $\frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ (6)

מ- (3) ו- (6) נקבל:

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c^2}{\left(a\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2} = \frac{c^2\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\left(a\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} + b\right)^2} =$$

$$\frac{c^2\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\left(a\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}+b\right)^2} = \frac{c^2\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)}{\left(a\cdot\frac{a}{b}+b\right)^2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

ואז: (7) $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{|c|}{a^2+b^2}$

כי: $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha-\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$

מ- (5) נקבל:

$$a^2\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = b^2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$a^2 \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = b^2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (8)$$

($0 < \frac{\alpha + \beta}{2} < \pi$ לכן $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ יכול להיות 0, חיובי או שלילי).

מ-(7) ו (8) נקבל:

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$2\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \frac{a + |c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$4\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{(a + |c|)^2}{a^2 + b^2}$$

<u>דרך II</u>

נכתוב $\tan\frac{x}{2} = t$ אזי

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 - t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$a(1 - t^2) + 2bt = c(1 + t^2)$$

$$(a + c)t^2 - 2bt + (c - a) = 0 \qquad t_1 , t_2$$

$$4\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{4}{\sec^2 \frac{\alpha}{2} \sec^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{4}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)}$$

$$= \frac{4}{1 + (t_1 + t_2)^2 - 2t_1t_2 + t_1^2t_2^2}$$

$$= \frac{4}{1 + (\frac{2b}{a + c})^2 - 2(\frac{c - a}{c + a}) + (\frac{c - a}{c + a})^2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{14} (\cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14}) =$$ .104

$$= \frac{2\sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14} + 2\sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{14} + 2\sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{5\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\sin \frac{3\pi}{7}}{2\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{14})}{2\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\cos \frac{\pi}{14}}{2\cos \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{2}$$

.105 <u>דרך I</u>

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin x \sin y + \sin x + \sin y - 1$$

$$2\sin^2 x + 2\sin^2 y = 2\sin x \sin y + 2\sin x + 2\sin y - 2$$

$$(\sin^2 x - 2\sin x + 1) + (\sin^2 y - 2\sin y + 1) +$$

$$+ (\sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y) = 0$$

$$(\sin x - 1)^2 + (\sin y - 1)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 0$$

ולכן $\sin x = 1 \qquad \sin y = 1 \qquad \sin x - \sin y = 0$

כלומר

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin y = 1 \end{cases}$$

מכאן

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, m ו n מספרים שלמים

$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

דרך II

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin x \sin y + \sin y - 1$$

$$\sin^2 x - \sin x(\sin y + 1) + \sin^2 y - \sin y + 1 = 0$$

התקבלה משוואה ריבועית עבור sinx. כדי שיהיה פתרון הדיסקרימיננטה צריכה להיות גדולה או שווה ל 0.

מכאן: $(\sin y + 1)^2 - 4(\sin^2 y - \sin y + 1) \geq 0$

$$\sin^2 y + 2\sin y + 1 - 4\sin^2 y + 4\sin y - 4 \geq 0$$

$$-3\sin^2 y + 6\sin y - 3 \geq 0$$

$$\sin^2 y - 2\sin y + 1 \leq 0$$

$$\sin y = 1$$

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

מכאן $\sin x = 1$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$$

m ו n מספרים שלמים.

.106 המשוואה הנתונה שקולה לשתי המערכות הבאות:

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}\sqrt{x}) = 1 & (1) \\ \cos(\pi\sqrt{x-2}) = 1 \end{cases} \quad \text{או:} \quad \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}\sqrt{x}) = -1 & (2) \\ \cos(\pi\sqrt{x-2}) = -1 \end{cases}$$

ממערכת (1) נקבל:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}(4m+1) \\ \pi\sqrt{x-2} = 2\pi n \end{cases} \quad \text{ואחרי הפישוט:} \quad \begin{cases} x = (4m+1)^2 & (3) \\ x = 4n^2 + 2 & (4) \end{cases}$$

כאשר m ו n מספרים שלמים אי-שליליים.
מ (3) נובע כי x הוא מספר אי-זוגי, אך מ (4) - כי x הוא מספר זוגי.
זוהי סתירה, לכן אין פתרון למערכת (1).

ממערכת (2) נקבל:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}(4k-1) \\ \pi\sqrt{x-2} = \pi(2\ell+1) \end{cases} \quad \text{ואחרי הפישוט:} \quad \begin{cases} x = (4k-1)^2 & (5) \\ x = (2\ell+1)^2 + 2 \end{cases}$$

כאשר k מספר טבעי ו ℓ שלם אי-שלילי.

מ (5) ו (6) נקבל:

$$(4k-1)^2 = (2\ell+1)^2 + 2$$

$$(4k - 2\ell - 2)(4k + 2\ell) = 2$$

$$(2k - \ell - 1)(2k + \ell) = 1$$

לא קיימים k ו ℓ מתאימים שיקיימו את השוויון האחרון. לכן, גם למערכת (2) אין פתרון.

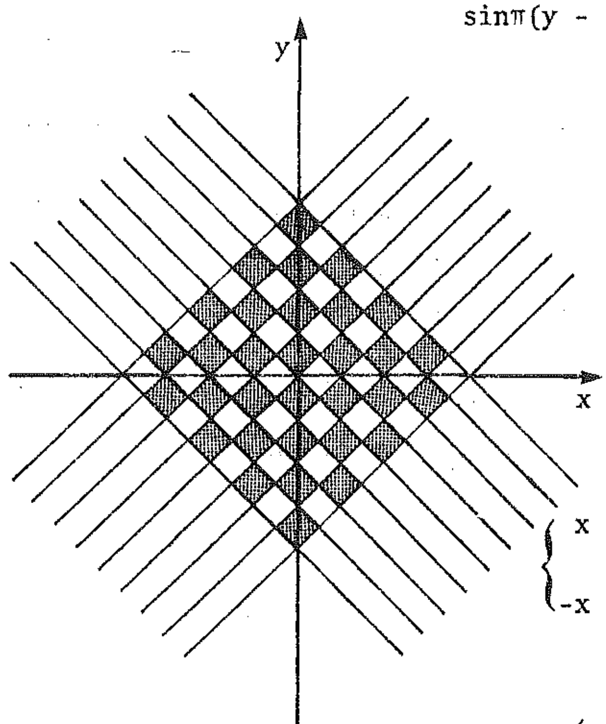
107. נשרטט מערכת צירים במישור ונחפש את המקום ההנדסי של הנקודות אשר שיעוריהן מקיימים את אי-השוויון.

$$\sin^2\pi x + \cos^2\pi y \le 1 \qquad (1)$$

נציב במקום $\cos^2\pi y$ את $1 - \sin^2\pi y$.

אחרי פישוט של אי השוויון (1) נקבל:

$$\sin\pi(y - x)\sin\pi(y + x) \ge 0 \qquad (2)$$



מכאן:

$$\begin{cases} \sin\pi(y - x) \ge 0 \\ \sin\pi(y + x) \ge 0 \end{cases} \qquad (3)$$

או

$$\begin{cases} \sin\pi(y - x) \le 0 \\ \sin\pi(y + x) \le 0 \end{cases} \qquad (4)$$

מ (3) נובע

$$\begin{cases} x + 2k \le y \le x + (2k + 1) \\ -x + 2n \le y \le -x + (2n + 1) \end{cases} \qquad (3')$$

מ (4) נובע

$$\begin{cases} x + 2m - 1 \le y \le x + 2m \\ -x + 2\ell - 1 \le y \le -x + 2\ell \end{cases} \qquad (4')$$

k, ℓ, m ו n מספרים שלמים.

המקום ההנדסי המבוקש הוא כל הנקודות המקיימות את המערכות (3') או (4') (ראה הציור).

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x = \qquad .108$$

$$= \sin x + \sin x\cos x + \frac{1}{3}(3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x) =$$

$$= \sin x + \sin x\cos x + \sin x\cos^2 x - \frac{1}{3}\sin^3 x =$$

$$= \frac{\sin x}{3}(3 + 3\cos x + 3\cos^2 x - \sin^2 x) =$$

$$= \frac{\sin x}{3}(2 + 3\cos x + 4\cos^2 x) =$$

$$= \frac{\sin x}{3}\left[(1 + 2\cos x)^2 + (1 - \cos x)\right] > 0$$

(כיון ש $0 < x < \pi$, $\sin x > 0$, $1 + \cos x > 0$

כי: $|\cos x| \le 1$).

.109 נכתוב: $x = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$ ואז $0 \le x \le 1$.

מאחר ש- $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, יוצא כי:

$$\cos\alpha + \sqrt{2}(\cos\beta + \cos\gamma)$$

$$= -\cos(\beta + \gamma) + \sqrt{2}(\cos\beta + \cos\gamma)$$

$$= 1 - 2\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2} + 2\sqrt{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\le 1 - 2x^2 + 2\sqrt{2}x$$

$$= 2 - (1 - 2\sqrt{2}x + 2x^2)$$

$$= 2 - (1 - \sqrt{2}x)^2$$

$$\le 2$$

ושוויון אם ורק כאשר $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ וגם $\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 1$.

$$A(\alpha) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)} + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) + \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)} =$$ .110

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)}{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos\frac{2}{3}\pi)} = \frac{2\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)}{\cos 2\alpha + 0.5}$$

בתחום $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{3}$ הפונקציה $\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)$ חיובית ועולה.

בתחום $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, הפונקציה $\cos 2\alpha$ חיובית ויורדת.

ומכאן, בתחום $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$, $A(\alpha)$ עולה.

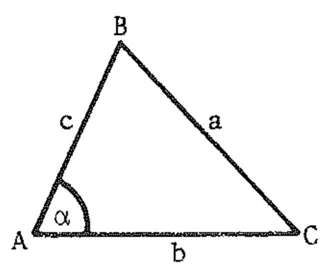
בתחום $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{3}$, $\cos 2\alpha$ שלילית ויורדת אך $|\cos 2\alpha| < 0.5$ ולכן

$\cos 2\alpha + 0.5$ חיובית ויורדת יוצא כי $A(\alpha)$ עולה גם בתחום זה.

כלומר, בתחום $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{3}$, $A(\alpha)$ עולה, והערך המינימלי מתקבל כאשר $\alpha = 0$:

$$A(0) = \frac{2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\cos 0 + 0.5} = \frac{\sqrt{3}}{1.5} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$ .111



מכאן:

$$bc = \frac{2S}{\sin\alpha}$$

לפי משפט הקוסינוסים:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$= (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos\alpha)$$

$$= (b - c)^2 + \frac{4S(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha} \geq \frac{4S(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha} = 4S\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

וזהו הערך המינימלי של a^2, ומתקבל כאשר:

$$b = c = \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$$