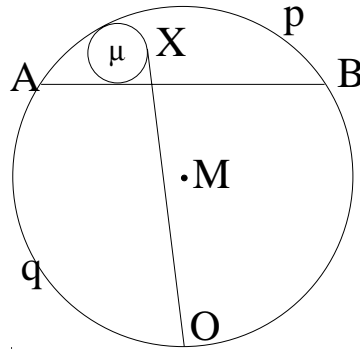


אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1985

1. המיתר  $AB$  מחלק את המעגל  $M$  לשתי קשתות  $p, q$ . הנקודה  $O$  היא הנקודה על  $q$  הרחוקה ביותר מהמיתר  $AB$ .  $\mu$  הוא מעגל כלשהו בפנים המעגל  $M$  המשיק מבפנים לקשת  $p$  ומשיק לישר  $AB$  (ראה ציור). הוכח כי המשיק מ- $O$  ל- $\mu$  שווה ל- $OA$ .



2. נתונים  $n$  מספרים חיוביים  $p_i$  ו- $n$  מספרים חיוביים  $q_i$  המקיימים

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i.$$

בהסתמך על אי השוויון  $x \ln x \geq x - 1$  עבור כל  $x > 0$  (או בכל דרך אחרת) הוכח כי

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i > \sum_{i=1}^n p_i \ln q_i.$$

3. פתור את המשוואה

$$\left[4x - \frac{1}{5}\right] - 3x + 4 = 0.$$

(הערה: עבור כל מספר ממשי  $a$  מסמן  $[a]$  את החלק השלם של  $a$ , כלומר המספר השלם  $t$  המקיים  $t \leq a < t + 1$ ). כמה פתרונות ישנם?

4. לכל מספר טבעי  $n$  נגדיר  $f(n)$  כמספר האפסים בסוף המספר  $n!$  (דוגמה:  $5040 = 7!$  ולכן  $f(7) = 1$ ;  $10! = 3,628,800$  ולכן  $f(10) = 2$ ).  
א. הוכח כי

$$f(5745) - f(1985) = f(5745 - 1985).$$

ב. האם לכל שני מספרים טבעיים  $x, y$  ( $x > y$ ), מתקיים  $f(x) - f(y) = f(x - y)$ ?  
נמק את תשובתך.

5. נתונה המשוואה

$$(\sin x)^{\sqrt{3x-1}} + 2(\cos 2x)^{\sqrt{-9x^2-3x+2}} - \log_{\frac{1}{x}} x^3 = a.$$

מהם הערכים האפשריים של  $a$  כך שלמשוואה זו יהיה לפחות פתרון ממשי אחד?

6. על לוח שחמט בעל 64 משבצות מעמידים 32 כלים לבנים ו-32 כלים שחורים. שני כלים

מהווים "זוג חריג" אם הם בעלי צבעים שונים ונמצאים באותה השורה או באותו הטור (מובן

כי כלי אחד יכול להשתתף בכמה זוגות חריגים). נסמן ב- $N$  את מספר הזוגות החריגים.

הוכח כי  $N \leq 256$ . האם יתכן שוויון? אם כן - מצא באילו תנאים. אם לא - הוכח מדוע לא.

7. משולש  $M$  יקרא "מיוחד" אם ניתן להתאים לו משולש שני  $N$  כך שיתקיים

א.  $M$  ו- $N$  דומים אבל אינם חופפים.

ב. שתי צלעות של  $N$  שוות לשתי צלעות של  $M$ .

מהם התנאים המאפיינים את קבוצת כל המשולשים המיוחדים?

8. נתונים שני מספרים טבעיים  $A, B$  כך ש- $A < B$ . הוכח כי בכל קבוצה של  $B$  מספרים

טבעיים עוקבים ניתן למצוא שני מספרים שמכפלתם מתחלקת ב- $AB$ .

9.  $a, b, c$  הם אורכי הצלעות של משולש. הוכח כי

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

10. המספרים הטבעיים  $a_1, a_2, \dots, a_n$  מקיימים

$$N \geq a_1 > a_2 > \dots > a_n \geq 1.$$

כמו כן נתון כי הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של כל זוג  $a_i, a_j$  אינה גדולה מ- $N$ .

$$a_i \leq \frac{N}{i}, i \text{ לכל}$$