

אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1986

1. הוכח כי עבור m שלם וחיובי וכל α ממשי הפולינום

$$x^{m+1} \cos(m-1)\alpha - x^m \cos m\alpha - x \cos \alpha + 1$$

$$\text{מתחלק ב-} x^2 - 2x \cos \alpha + 1.$$

2. מצא את כל הזוגות של המספרים השלמים (x, y) המקיימים

$$(x-1) \cdot x \cdot (x+1) = y^5.$$

3. הוכח כי לא קיימים מספרים שלמים x, y המקיימים $x^3 - y^3 = 5746$.

4. נתון חצי עיגול שקוטרו AB . מבין כל המצולעים הקמורים בעלי n צלעות, שכל קודקודיהם נמצאים בחצי העיגול, מהו המצולע בעל השטח המירבי? נמק.

5. $\{a_1, a_2, \dots\}$ מהווים סדרה אינסופית של מספרים ממשיים, כולם שונים זה מזה. הוכח כי ניתן לבחור מסדרה זו סדרה חלקית שהיא אינסופית ומונוטונית.

6. נתונים מספרים ממשיים a, b, c, p, q, r המקיימים

$$a < b < c \quad (\text{I})$$

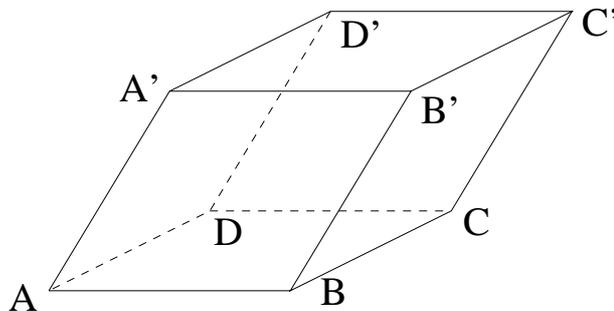
$$r > 0, q > 0, p > 0 \quad (\text{II})$$

הוכח כי למשוואה

$$\frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b} + \frac{r}{x-c} = 1$$

יש שלושה פתרונות ממשיים, אשר בדיוק אחד מהם גדול מ- c .

7. $ABCD A' B' C' D'$ הוא מקבילון תלת ממדי (ראה ציור).



דרג C' מעבירים מישור מחוץ למקבילון החותך את הישרים AB, AD, AA' בנקודות P, R, Q בהתאמה.

קבע את R, Q, P על הישרים האלה כך שנפח הפירמידה $APQR$ יהיה קטן ככל האפשר.

8. המערכת a_{ij} מוגדרת עבור $i \geq 0$ וכל j שלם $(-\infty < j < \infty)$ כדלקמן:

$$a_{0,0} = 1 \quad (\text{I})$$

$$a_{0,j} = 0 \quad \text{עבור } j \neq 0 \quad (\text{II})$$

$$a_{i,j} = 2(a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j+1}) - a_{i-1,j} \quad \text{עבור כל } i > 0 \text{ מתקיים} \quad (\text{III})$$

הוכח כי

$$a_{n,0} = (-1)^n \sum_{r=0}^{[n/2]} 2^{2r} \frac{n!}{(n-2r)!(r!)^2}.$$

9. ידוע כי מספר הפרמוטציות של הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$ הוא $n!$. נסמן את הפרמוטציות האלה

$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$. אם π_k היא הסדרה (a_1, a_2, \dots, a_n) נגדיר

$$S_k = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^2.$$

חשב את הממוצע החשבוני של המספרים S_k , דהיינו

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n!} S_k.$$