אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע״ש פרופ׳ גיליס 1987

1. הפונקציות $f(x), g(x)$ מוגדרות עבור כל x השייך לקבוצה מסוימת, A, וערכיהן הם מספרים ממשיים. נתון כי עבור כל x_1, x_2 השייכים לקבוצה ושונים זה מזה קיים

$$f(x_1) + f(x_2) = g(x_1) + g(x_2).$$

א. הוכח כי אם בקבוצה A יש לפחות שלושה איברים, אזי $f(x) \equiv g(x)$.

ב. האם הטענה בסעיף א׳ נכונה גם אם מספר האיברים של A קטן מ-3? נמק.

2. אם נציג את המספר $(1987)^{5747}$ בצורה בינארית (לפי בסיס ספירה 2), מה יהיו 5 הספרות האחרונות? נמק.

3. עבור כל קבוצה $\{p, q, r, \ldots\}$ של מספרים טבעיים מסמנים ב-$(p, q, r, \ldots)$ את הגורם המשותף המירבי שלהם, כלומר המספר הטבעי הגדול ביותר המחלק את כולם. יהיו (a, b, c) הם מספרים טבעיים ונסמן

$$x = (b, c), \qquad y = (c, a), \qquad z = (a, b).$$

הוכח כי $(x, y, z) = (a, b, c)$.

4. AB, BC הם שני מיתרים שווי אורך של מעגל. D היא נקודה בפנים המעגל, כך ש-BCD הוא משולש שווה צלעות. הישר AD פוגש את המעגל שנית ב-E. הוכח כי DE שווה לרדיוס המעגל.

5. רוצים ליצור תמורה (פרמוטציה) $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ של הקבוצה $\{1, 2, \ldots, n\}$ כך שעבור כל r $(1 \leq r \leq n)$, יתקיים $a_r > r - 2$. כמה תמורות מסוג זה קיימות?

6. הוכח כי עבור כל מצולע קמור, לאו דווקא משוכלל, הממוצע החשבוני של אורכי צלעותיו קטן מזה של אלכסוניו.

7. במישור m נתון מצולע $A_1A_2\ldots A_n$ אשר כל צלעותיו שוות, כלומר

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = A_nA_1 = a.$$

רוצים למצוא נקודה P מחוץ למישור m כך שגם

$$PA_1 = PA_2 = \ldots = PA_n = a.$$

א. הוכח כי הדבר בלתי אפשרי אם $n > 5$.

ב. הוכח כי אם ערכו של n הוא 3, 4 או 5 אזי קיימת נקודה P מתאימה אם ורק אם המצולע הנתון הוא משוכלל.

8. $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ היא תמורה (פרמוטציה) כלשהי של הקבוצה $\{1, 2, \ldots, n\}$. הוכח כי

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_1+a_2+a_3} + \cdots + \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \frac{2n}{n+1}.$$

9. הוכח כי אם $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ ו-$0 < \theta < \pi$ אזי

$$\left|\sum_{r=1}^{n} a_r \sin r\theta\right| \leq \frac{a_1}{\sin \frac{1}{2}\theta} .$$

10. $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ היא תמורה (פרמוטציה) כלשהי של הקבוצה $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. הוכח כי

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \frac{2n}{n+1} .$$

11. הוכח כי אם $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$ ו-$0 < \theta < \pi$ אזי

$$|\sum_{r=1}^{n} a_r \sin r\theta| \leq \frac{a_1}{\sin\theta/2} . \tag{1.2}$$