אולימפיאדת המתמטיקה לנוער ע"ש פרופ' גיליס 1996

1. a מספר ראשוני כלשהו ו-n מספר טבעי גדול מ-2. מצא את כל הפתרונות השלמים של $x^n + ay^n = a^2z^n$.

2. מצא את כל הפולינומים $P(x)$ כך שלכל x מתקיים

$$P(x+1) - 2P(x) - P(x-1) = x.$$

3. ABC הוא משולש חד זוית שצלעותיו a, b, c וזויותיו α, β, γ.
נסמן ב-AD את הגובה מ-A על BC, ב-CF את התיכון מ-C וב-BE את חוצה הזוית B.
הוכח כי תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-BE, CF, AD יעברו בנקודה אחת הוא

$$\cos\gamma \tan\beta = \sin\alpha.$$

4. למלון מגיעים 8 אורחים ויש לשכנם ב-4 חדרים, כך שאף חדר לא יהיה ריק. לכל אורח יש לכל היותר 3 אורחים אחרים עמם אינו מוכן לחלוק חדר. הנח כי אם אורח A אינו מוכן לגור עם אורח B אז גם אורח B אינו מוכן לגור עם אורח A. הוכח כי יש דרך לשכן את האורחים במלון (לשביעות רצונם) כך שבכל חדר יהיו בדיוק שני אורחים.

5. נתון משולש ABC ובו $R = 2r$, כאשר r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש ו-R הוא רדיוס המעגל החוסם אותו. הוכח כי המשולש הוא שווה צלעות.

6. נתון $|x|, |y|, |z| \geq 2$. מהו הערך הקטן ביותר של הביטוי $|xyz + 2(x+y+z)|$?

7. a, b, c הם מספרים טבעיים. מצא את כל הפתרונות של המערכת

$$a^2 = 4(b+c), \tag{1.5}$$

$$a^3 - 2b^3 - 4c^3 = \frac{1}{2}abc. \tag{1.6}$$

8. N היא קבוצת המספרים הטבעיים. נתונה פונקציה $f : N \to N$ (כלומר f המוגדרת עבור מספרים טבעיים ומקבלת ערכים שהם מספרים טבעיים).
נתון עוד כי:

(.i) $f(1) = 1$;

(.ii) $f(2n) = f(n)$ לכל $n \in N$;

(.iii) $f(2n+1) = f(2n) + 1$ לכל $n \in N$.

בנתונים אלה:

א. מצא את M, הערך הגדול ביותר של $f(n)$ כאשר $1 \leq n \leq 1995$.

ב. מצא את כל המספרים n, $1 \leq n \leq 1995$, עבורם $f(n) = M$.