תחרות גיליס 2009-2010

1. הרי פוטר הגיע לחנות הדובשנרייה בהוגסמיד. הוא מגלה, שהכסף שלו מספיק בדיוק ל-12 סוכריות קוסמים ול-15 קרפדות שוקולד, או בדיוק ל-10 קרפדות שוקולד ול-30 נשיקות מנטה, או בדיוק ל-45 נשיקות מנטה ול-18 סוכריות קוסמים. מהו המספר המרבי של סוכריות קוסמים שהרי יכול לקנות בכסף שיש לו? נמקו!

פתרון.

נסמן ב-x את המחיר של סוכריית קוסמים, ב-y את המחיר של קרפדת שוקולד וב-z את המחיר של נשיקת מנטה. כמו כן, נסמן ב-N את סך כל הכסף שיש לו. אנו רוצים למצוא את המספר המרבי של סוכריות קוסמים שהרי יכול לקנות בכסף שיש לו, כלומר, את $\frac{N}{x}$.

הנתונים בבעיה נותנים לנו את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 12x + 15y = N \\ 10y + 30z = N \\ 18x + 45z = N \end{cases}$$

נכפיל את המשוואה השנייה ב-3 ואת השלישית ב-2 ונחסר (המשוואה החדשה רשומה במקום המשוואה השנייה). כמו כן, נכפיל את המשוואה הראשונה ב-2. נקבל:

$$\begin{cases} 24x + 30y = 2N \\ -36x + 30y = N \\ 18x + 45z = N \end{cases}$$

נחסר את המשוואה השנייה מהראשונה ונקבל: 60x = N. לכן $\frac{N}{x} = 60$, כלומר, הרי יכול לקנות בכסף שיש לו לכל היותר 60 סוכריות קוסמים.

2. א) האם אפשר להציג את המספר 2010 כסכום של שנים או יותר מספרים אי-זוגיים עוקבים? אם כן, מצאו דוגמא. אם לא, הסבירו מדוע. נמקו!

ב) מהן כל האפשרויות להציג את המספר 2009 באותו אופן? רשמו את **כל** האפשרויות. נמקו!

פתרון.

א) אי-אפשר. אילו הדבר היה אפשרי, מספר המחוברים היה זוגי. סכום שני מספרים אי-זוגיים עוקבים מתחלק ב-4, לכן גם סכום של מספר זוגי של מספרים אי-זוגיים עוקבים מתחלק ב-4. כיוון ש- 2010 אינו מתחלק ב-4, הדבר בלתי-אפשרי.

ב) פה מספר המחוברים צריך להיות אי-זוגי, נגיד, $2k+1$. נסמן את המספר שנמצא בדיוק באמצע (במקום ה-$k+1$) ב-x. אזי סכום כל המספרים האי-זוגיים שווה ל- $x(2k+1)$. ובכן, כדי למצוא את כל הפתרונות לבעיה, עלינו למצוא את כל הפירוקים של 2009 כמכפלה של שני מספרים. כיוון ש- $2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41$, האפשרויות הם:

$$x = 1,\ 2k+1 = 2009$$
$$x = 7,\ 2k+1 = 287$$
$$x = 41,\ 2k+1 = 49$$
$$x = 49,\ 2k+1 = 41$$
$$x = 287,\ 2k+1 = 7$$
$$x = 2009,\ 2k+1 = 1$$

הפתרון האחרון לא מעניין – הוא מציג 2009 ש"סכום של מספר אחד". אם רוצים כי כל המחוברים יהיו חיוביים – יש להשאיר רק פתרונות בהם $x > 2k+1$.

3. בתחרות "ראונד רובין" בטניס השתתפו 7 שחקנים. בתחרות כל שחקן משחק עם כל שחקן פעם אחת. לכל שחקן יש תוכנה לעיבוד מידע בשם "וְיוֹסִיף דַעַת, יוֹסִיף מַכְאוֹב", אשר מקבלת את התוצאות הקיימות ומחזירה לשחקן אוסף רשימות:

הרשימה הראשונה מכילה רק את השחקן עצמו.

הרשימה השנייה מכילה את השחקן עצמו ואת כל השחקנים איתם הוא שיחק וניצח.

כל רשימה הבאה מכילה את הרשימה הקודמת ואת כל השחקנים איתם השחקנים מהרשימה הקודמת שיחקו וניצחו.

בשלב מסוים, השחקנים הכניסו את הנתונים לתוכנה, והתברר שאצל כל אחד, הרשימה השביעית שונה מהרשימה השישית. כמה משחקים התקיימו עד לרגע זה?
הערה: בכל משחק טניס אחד המשתתפים מנצח (אין תיקו).

פתרון.
אם הרשימה השביעית שונה מהרשימה השישית, זה אומר כי כל רשימה ארוכה מקודמתה.
כיוון שמשתתפים בתחרות 7 שחקנים בלבד, כל רשימה ארוכה מקודמתה ב-1.
ניקח את הרשימה השביעית של אחד השחקנים. השחקן הראשון בה ניצח את השחקן השני שניצח את השחקן השלישי וכן הלאה. זה אומר כי כל שחקן פרט לשחקן האחרון ברשימה ניצח בדיוק משחק אחד.
כיוון שאותו הדבר נכון לכל רשימה שביעית, כל שחקן ניצח בדיוק משחק אחד.
כיוון שמספר המשחקים שהתקיימו עד כה שווה למספר הנצחונות, אנו מסיקים כי בסך הכל התקיימו 7 משחקים.

4. מצאו את כל הטרינומים $p(x) = ax^2 + bx + c$ עם מקדמים רציונאליים a, b, c , שמקבלים ערך אי-רציונאלי $p(x)$ עבור כל מספר אי-רציונאלי x. נמקו!

פתרון. התשובה: $a = 0, b \neq 0$.
נוכיח בדרך השלילה כי $a = 0$. אם לא, נרשום:

$$p(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4a}\right)$$

עכשיו אם נציב במקום x מספר אי-רציונאלי $\sqrt{2} - \frac{b}{2a}$, נקבל $p(x) = a\left(2 + \frac{4c - b^2}{4a}\right)$

- מספר רציונאלי. הגענו לסתירה. לכן בהכרח $a = 0$.
אם בנוסף $b = 0$ $p(x) = c$ - מספר רציונאלי גם כאשר x אי-רציונאלי. לכן $b \neq 0$.

בכוון הנגדי, אם $a=0, b\neq 0$, הפולינום $p(x)$ מקבל ערכים אי-רציונאליים עבור x אי-רציונאלי.

<u>הכללה</u>. נציין כי טענה הרבה יותר כללית נכונה: בין כל הפולינומים $p(x)$ עם מקדמים רציונאליים רק בעלי מעלה ראשונה ($p(x)=ax+b$) מקבלים ערכים אי-רציונאליים עבור ארגומנט אי-רציונאלי.נביא כאן מתווה של הוכחה. אפשר להניח כי המקדמים של $p(x)=ax^n+\mathrm{K}+c$ כולם שלמים ו- $a>0$. מספיק להראות כי עבור כל פולינום כזה אפשר להחליף c במספר שלילי קטן מאוד כך של- $p(x)$ אין שורשים רציונאליים (אנו מעדיפים למצוא c שלילי מאוד כי זה מבטיח קיום שורש ממשי).

אם יש שורש רציונאלי $\dfrac{u}{v}$, אז אפשר להראות כי c מתחלק ב- u ואלו a מתחלק ב- v.

נתמקד עתה במספרים c שליליים קטנים מספיק כך שלא רק מובטח כי ל- $p(x)$ יש שורש ממשי, אלא גם $-c$ גדול מסכום הערכים המוחלטים של שאר המקדמים. זה מבטיח לנו כי אין ל- $p(x)$ שורשים בעלי ערך מוחלט ≤ 1 . אם, בנוסף, נבחר c ראשוני (שלילי), $\dfrac{1}{v}$ לא יכול להיות שורש כי הערך המוחלט שלו קטן או שווה ל-1 , לכן האפשרות היחידה היא $u=\pm c$, כך ש- $\left|\dfrac{u}{v}\right|\geq\left|\dfrac{c}{a}\right|$. קיום שורש בעל ערך מוחלט גדול כזה בלתי-אפשרי עבור c שלילי מספיק קטן עבור $n>1$.

5. תארו את המקום הגיאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים חדי-הזווית אשר חסומים במעגל נתון. נמקו!
הערה: מרכז הכובד של משולש הוא נקודת מפגש התיכונים שלו.

פתרון.
המקום הגיאומטרי הוא העיגול שמרכזו במרכז המעגל הנתון והרדיוס שלו הוא שליש רדיוס המעגל הנתון. העיגול שתיארנו אינו כולל את המעגל שחוסם אותו (את השפה).

<u>כיוון אחד</u>: מרכז הכובד של כל משולש חד-זווית החסום במעגל נמצא במרחק של $<\dfrac{r}{3}$ ממרכז המעגל (r הוא רדיוס של המעגל הנתון).
אנחנו נסמן את מרכז המעגל הנתון ב- O, את קדקודי המשולש החסום ב- ABC ואת מרכז הכובד שלו ב- M. עלינו להוכיח כי $|OM|<\dfrac{r}{3}$.
יהיו A',B',C' מרכזי הצלעות BC,AC,AB בהתאמה. המשולש $A'B'C'$ דומה למשולש ABC והנקודה M היא מרכז הכובד של שני המשולשים. אפשר לתאר בניית המשולש $A'B'C'$ על-ידי הומותטיה עם מרכז ב- M ועם מקדם מתיחה $-\frac{1}{2}$.
נזכיר את מושג ההומותטיה שהוא אחד המושגים החשובים בגיאומטריה.
תהי M נקודה במישור. הומותטיה שמרכזה ב- M עם מקדם מתיחה $c>0$ היא טרנספורמציה של המישור המעבירה כל נקודה X לנקודה X' כך ש- M,X,X' נמצאים על אותו קו ישר, המרחק $|MX'|$ שווה ל- $c\,|MX|$ והנקודות X,X' נמצאות מאותו צד של M.
אם מקדם המתיחה c שלילי, הנקודות X ו- X' צריכות להיות מהצדדים השונים של M.

נחזור לפתרונינו. ההומותטיה שמרכזה ב- M ומקדם המתיחה $-\frac{1}{2}$ מעבירה נקודות A,B,C

לנקודות A',B',C', ומשאירה M במקום. הנקודה O היא נקודת חיתוך הגבהים עבור המשולש $A'B'C'$. לכן O מתקבלת על-ידי ההומותטיה שלנו מנקודת החיתוך H של הגבהים במשולש ABC. אנחנו מסיקים כי הנקודה M נמצאת על הקטע HO וכי מתקיים שוויון $|MO|=2|HM|$ או, במלים אחרות, $|HO|=3|OM|$. כיוון שהמשולש ABC חד-זווית, H נמצאת בתוך ABC, ולכן גם בתוך המעגל החוסם. המסקנה: $|HO|<r$, זאת אומרת, $|OM|<\frac{r}{3}$.

<u>הכיוון השני</u>: כל נקודה שנמצאת במרחק $<\frac{r}{3}$ ממרכז המעגל היא מרכז כובד של משולש חד-זווית החסום במעגל המקורי.

נבחר נקודה M כך ש- $|OM|<\frac{r}{3}$. נבחר A נקודה על המעגל כך שהרדיוס AO מכיל את M. תהי N נקודה על המשך של הרדיוס AO כך שמתקיים $|AM|=2|MN|$. הקדקודים B ו- C הם נקודות חיתוך של הניצב ל- AN בנקודה N עם המעגל. המשולש ABC שווה שוקיים כך ש- AN התיכון והגובה שלו, ואילו M מרכז הכובד שלו. המשולש הוא חד זווית כי O נמצא בתוכו.

פתרונות אלטרנטיביים.

- ניתן להוכיח את הכיוון הראשון על-ידי ביטוי של המספר $\frac{|OM|}{r}$ דרך הזוויות AOB, BOC בעזרת טריגונומטריה.
- קל לראות שהמנה $\frac{|OM|}{r}$ שווה ל- $\frac{1}{3}$ עבור משולש ישר זווית. אם עבור משולש ABC חד זווית אנו בוחנים את התנהגות הביטוי $\frac{|OM|}{r}$ כפונקציה של נקודה B משתנה (A,C קבועות), אפשר להוכיח בעזרת גיאומטריה \ אנליזה כי המינימום היחיד של הביטוי מתקבל כאשר $|AB|=|BC|$. זה אומר כי אם אנחנו מקרבים קדקוד B אל קדקוד קרוב יותר מבין A ו- C, ערך הביטוי יעלה עד שיגיע ל- $\frac{1}{3}$. זה מוכיח כי הביטוי קטן מ- $\frac{1}{3}$ עבור כל משולש חד זווית.

6. דני אושן רוצה לפרוץ כספת, אך ברגע אמת מתברר, כי חומר הנפץ שלו נרטב והוא צריך לפתוח את המנעול. המנעול של הכספת מהווה טבלה nxn, כאשר בכל תא של הטבלה נמצא גלגל עם הספרות מ-0 עד 9, לפי הסדר.
כמו כן, ליד כל שורה ומעל כל עמודה יש כפתור, אשר מאפשר להגדיל את כל הספרות בשורה \ עמודה זו ב-1 (9 מוחלף ב-0).
אושן זוכר, מהמידע שאסף, שכדי לפתוח את המנעול יש לאפס את כל הספרות בטבלה, וזה צריך להיעשות על ידי סדרה של לחיצות כפתורים.
אבל הזמן אוזל, ויש לפתוח את הכספת מהר.
הוכיחו, שאושן יכול לעשות זאת ב-
א) פחות מ-$18n$ פעולות.
ב)לכל היותר $9n$ פעולות.
נמקו!

פתרון.

א) קודם כל, לא חשוב באיזה סדר אנחנו לוחצים על הכפתורים – חשוב רק כמה פעמים נלחץ על כל כפתור. אם, כדי לפתוח את הכספת עלינו ללחוץ על כפתורי השורה $a_1,\ldots,a_n$ פעמים, ואילו על כפתורי העמודה $b_1,\ldots,b_n$ פעמים, הרי מספר כללי של הלחיצות יהיה $\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$. כיוון שכל המספרים a_i,b_j קטנים או שווים ל-9, הסכום המרבי הוא $9(n+n)=18n$.

את החסם $18n$ לא ניתן להשיג, כי הוא מתאר את המקרה $a_i=b_j=9$. המקרה זה כל ספרה בטבלה עולה ב- 8. אבל את אותה התוצאה אפשר להשיג על-ידי לחיצה של כל כפתור שורה 8 פעמים ($a_i=8, b_j=0$) - פעולה זו דורשת רק $8n$ לחיצות.

<u>הערה</u>: לא כל מצב התחלתי של הטבלה מאפשר פתיחת הכספת בעזרת הכפתורים. אך אנחנו מבינים כי לא מיצרים כספות שלא נפתחות כי בכספת שלא ניתן לפתוח, לא ניתן גם לשים שום דבר.

ב) אם נחשוב יותר טוב, נבין כי את ההערכה $18n$ ניתן לשפר.

נשים לב כי אם נלחץ כל כפתורי השורה פעם אחת, נקבל אותה תוצאה שנקבל אם נלחץ על כל כפתורי העמודה פעם אחת. לכן, אם סידרת המספרים $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ פותחת את הכספת, גם הסדרה $a_1+1,\ldots,a_n+1,b_1-1,\ldots,b_n-1$ פותחת את הכספת.

כיוון ש- 10 לחיצות לאותו כפתור מחזירות את מצב הטבלה לקדמותה, המספרים a_i,b_j - שאריות בחילוק ב- 10 והפעולות $+1$ או -1 הן פעולות עם שאריות: $9+1=0$, $0-1=9$.

עכשיו אנחנו יכולים לנסח מחדש את שאלה (ב): נתונים $2n$ מספרים $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ שלמים מ- 0 ועד 9 כל אחד. עלינו להוכיח כי קיים מספר k כך שאם נשים

$$a_1^{(k)}=a_1+k,\ldots,a_n^{(k)}=a_n+k,\quad b_1^{(k)}=b_1-k,\ldots,b_n^{(k)}=b_n-k$$

כאשר הפעולות חיבור וכפל הן פעולות עם שאריות, זאת אומרת, התוצאה שוב בין 0 ל- 9, נקבל $\sum_{i=1}^{n}a_i^{(k)}+\sum_{i=1}^{n}b_i^{(k)}\le 9n$.

ועכשיו הצעד האחרון. לכל i הסכום $\sum_{k=0}^{9}a_i^{(k)}$ שווה ל- 45 (כל שארית מופיעה פעם אחת), כך שסכום כל ה- $a_i^{(k)}$ שווה ל- $45n$. גם סכום של כל $b_i^{(k)}$ שווה ל- $45n$.

לכן לא יתכן כי עבור כל $k=0,\ldots,9$ יתקיים $\sum_{i=1}^{n}a_i^{(k)}+\sum_{i=1}^{n}b_i^{(k)}>9n$. זה מוכיח את הטענה.