אולימפיאדה במתמטיקה ע"ש פרופ' גיליס – תשע"ד 2013

1. א. מצא/י את ספרת היחידות של המספר

$$\left(101^2-100^2\right)\cdot\left(102^2-101^2\right)\cdot\left(103^2-102^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(200^2-199^2\right)$$

ב. מצא/י את ספרת העשרות של אותו המספר.

2. יהיו $\Delta A_1A_2A_3,\ \Delta B_1B_2B_3,\ \ \Delta C_1C_2C_3$ שלושה משולשים שווי צלעות (הקודקודים בכל אחד מהמשולשים ממוספרים בכיוון השעון). נתון: $A_3=B_3=C_3$. נסמן ב-M, N את מרכזי הכובד של המשולשים $\Delta A_1B_1C_1,\ \ \Delta A_2B_2C_2$. הוכיחו כי $\Delta A_3M\ N$ הוא משולש שווה צלעות.

הערה: מרכז הכובד של משולש הוא נקודת החיתוך של התיכונים במשולש זה.

3. ABCDEF הוא משושה קמור. במשושה קיימת נקודה K, כך שהמרובעים ABCK ו-DEFK שניהם מקביליות. הוכח/י כי שלושת הישרים המחברים את הקדקודים A, B, C לאמצעי הקטעים CE, DF, EA בהתאמה, נחתכים בנקודה אחת.

4. נתונה שורה של $n\geq 7$ משבצות. בשלושת המשבצות השמאליות ביותר עומדים חיילים לבנים; בשלושת המשבצות הימניות ביותר עומדים חיילים שחורים. השחקן הלבן והשחקן השחור משחקים בתורות; השחקן הלבן מתחיל. בכל מהלך מותר לכל שחקן לקחת חייל בצבע שלו ולהזיז אותו למשבצת סמוכה, כל עוד היא לא תפוסה על ידי חייל באותו הצבע. אם במשבצת שאליה הוא מזיז את החייל יש כבר חייל בצבע הנגדי, השחקן מוריד מהלוח את שני החיילים (החייל שלו והחייל של היריב). השחקן שמוריד את שני החיילים האחרונים מהלוח מנצח.

למי יש אסטרטגיה מנצחת, ללבן או לשחור, ואיזו? (התשובה יכולה להיות תלויה ב-n).

5. פולינום p בעל מקדמים שלמים מקיים $p(16)=36$, $p(14)=16$, $p(5)=25$.
מצא/י את כל הערכים האפשריים עבור $p(10)$.

6. נתון n טבעי. מצא את המספר הממשי k הגדול ביותר, עבורו לכל n מספרים ממשיים $x_1,x_2,\ldots,x_n$ מתקיים אי-השוויון*:

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2}\geq k\cdot\min\left(|x_1-x_2|,|x_2-x_3|,\ldots,|x_{n-1}-x_n|,|x_n-x_1|\right).$$

(התשובה יכולה להיות תלויה ב-n).

*min = הערך המינימלי מבין קבוצת הערכים הנתונים בסוגריים.

7. מצאו x ממשי שמקיים $\frac{x^7}{7}=1+\sqrt[7]{10}\,x\left(x^2-\sqrt[7]{10}\right)^2$.

בהצלחה!