

אולימפיאדה במתמטיקה ע"ש יוסף גיליס 2001

1. המישור צבוע בשני צבעים כך שכל נקודה צבועה או בשחור או בלבן. הוכח כי תמיד אפשר למצוא:
(א) שלוש נקודות צבועות באותו צבע, כך שאחת מהן נמצאת בדיוק באמצע הקטע שמחבר את שתי הנקודות האחרות;
(ב) שלוש נקודות צבועות באותו צבע, שיוצרות משולש שווה צלעות.
2. אבי ובני משחקים במשחק "קר או חם": אבי מחביא מטבע במרחק של לא יותר מ- N מטרים מבני. בני יכול לצעוד בכל כיוון שהוא במשור בצעדים שאורכם לא עולה על מטר אחד. אחרי כל צעד אבי אומר לבני אם הוא התקרב למטבע או התרחק ממנו. איך בני צריך לשחק כדי להתקרב למטבע עד כדי מטר אחד אחרי $8+3N/2$ צעדים או פחות?
3. על שלוש צלעות של המשולש ABC נמצאות הנקודות P, Q, R כך ש-
 $AP:PB=BQ:QC=CR:RA=2:1$. ידוע שכל הזוויות של המשולש PQR שוות לזוויות של המשולש ABC (באותו הסדר). הוכח כי המשולש ABC שווה צלעות.
4. הוכח כי לכל מספר ראשוני p המספר 2^p+3^p אינו ריבוע של מספר שלם.
5. שתי שלשות של מספרים ממשיים חיוביים $0 < a < b < c$ ו- $0 < p < q < r$ מקיימות את התנאים הבאים:

$$a+b+c=p+q+r, \quad abc=pqr.$$

בנוסף לכך ידוע שכל שלושת המספרים p, q, r נמצאים בקטע $[a, c]$. הוכח כי שתי השלשות האלה זהות: $a=p, b=q, c=r$.