אולימפיאדה ע"ש יוסף גיליס

<u>21 ינואר 2002</u>

1. עבור אילו מספרים טבעיים n יהיו המספרים $n+1$, $n+11$, $n+111$ שלושתם ראשוניים?
2. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת על הקטע $[0,1]$ ומקיימת שם את התנאים הבאים:

$$f(0)=f(1)=0, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) < f(x)+f(y).$$

הוכח את המשפטים הבאים:

(1) $f(x) \geq 0$ לכל $x \in [0,1]$.

(2) ל- f יש אינסוף שורשים ב- $[0,1]$.

(3) אם $f(x) \leq A$ על $[0, ½]$ עבור A מסוים, אז $f(x) \leq A$ על $[0,1]$.

(4) אם $f(x) \leq 2002(1-x)$ אז $f(x)$ היא זהותית 0 על $[0,1]$.

(5) בנה דוגמא של פונקציה שאיננה זהותית 0 על $[0,1]$ אשר מקיימת את התנאים הרשומים לעיל.

3. נתונים שישה עיגולים פתוחים (עם הפנים, בלי ספ) במישור, שלושה כחולים ושלושה אדומים. כל עיגול כחול חותך את כל העיגולים האדומים. הוכח כי תמיד נמצאים שני עיגולים מאותו הצבע החותכים זה את זה.
4. סדרת המספרים השלמים $x_0, x_1, x_2, \ldots$ מתחילה עם המספרים $1,0,2 \ldots$ וממשיכה על-פי הנוסחה $x_{n+2} = 2x_n + x_{n-1}$ עבור $n = 1,2,\ldots$. הוכח כי עבור כל מספר טבעי m, הסדרה מכילה שני מספרים עוקבים המתחלקים ב- m.
5. טבלה אינסופית מכילה מספרים ממשיים בין 0 ל- 2002, כך שכל מספר בטבלה שווה לממוצע של ארבעת שכניו (שני שכנים באותה השורה, ושני שכנים באותו הטור).
הוכח שכל המספרים בטבלה שווים זה לזה.