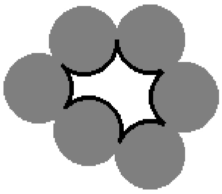
האולימפיאדה הארצית ה-46 ע"ש פרופ' גיליס במתמטיקה תשע"ג

יש להוכיח כל טענה ולנמק כל תשובה. לא יינתנו נקודות על תשובה נכונה ללא פתרון מלא. אסור להשתמש במחשבון.



1. לפניכם איור של שישה מטבעות. הרדיוס של כל מטבע הוא 1 ס"מ. המטבע הראשון משיק לשני, השני – לשלישי, השלישי – לרביעי, הרביעי – לחמישי, החמישי – לשישי והשישי – לראשון. אין זוגות אחרים של מטבעות משיקים. בין המטבעות נוצר מקום ריק שצורתו מזכירה כוכבית עקומה. מהו היקפה של הכוכבית הזאת?

תשובה. 4π ס"מ.

פתרון. נסמן את המרכזים של המטבעות A, B, C, D, E, F (בסדר זה). אז הצלעות של הכוכבית העקומה הן קשתות במעגלים שרדיוסיהם 1 ס"מ, והזוויות המרכזיות המתאימות להן הן זוויות המשושה ABCDEF. סכום זוויותיו של המשושה הוא $720°$ או 4π רדיאנים (זהו הסכום של סכומי הזוויות בשני מרובעים: ABCD ו-DEFA, שכל אחד מהם נותן $360°$), לכן סכום אורכי הקשתות הוא 4π ס"מ.

2. נתונה קבוצה A של כל המספרים השלמים מ-1 ועד 2012.

תת-קבוצה B של A תיקרא **מצומצמת** אם עבור כל שני מספרים x,y (לא בהכרח שונים) השייכים ל-B, המספר $x \cdot y$ אינו שייך ל-B. למשל, כל תת-קבוצה שמכילה את המספרים 3, 5, 15 אינה מצומצמת, וכך גם כל תת-קבוצה שמכילה את 4 ו-16.

א. מצא/י את הגודל המקסימאלי האפשרי של תת-קבוצה מצומצמת של A.

ב. מצא/י את מספר תתי-הקבוצות המצומצמות בעלות אותו גודל מקסימאלי.

תשובות. א. 1968 (זוהי השנה בה התחילה האולימפיאדה ע"ש גיליס). ב. 1.

פתרון.

א. נשים לב שאם נבחר $B=\{45,46,...,2012\}$, אזי נקבל קבוצה מצומצמת, כי מכפלת כל שני מספרים השייכים אליה היא לפחות :

$45^2=\left(40+5\right)^2=1600+400+25=2025>2012$. כלומר, ניתן לבנות תת-קבוצה מצומצמת של A בגודל 1968 = 44 – 2012 . כעת, נתבונן באוסף הבא של תתי-קבוצות של A:

$$\left\{44,44^2\right\},\ \left\{43,43^2\right\},\ ...\ ,\ \left\{7,7^2\right\},\ \left\{6,45,270\right\},\ \left\{5,46,230\right\},$$
$$\left\{4,47,188\right\},\ \left\{3,50,150\right\},\ \left\{2,51,102\right\},\ \left\{1\right\}.$$

כל איבר השייך ל-A מופיע מקסימום בקבוצה אחת מתוך 44 הקבוצות הנ"ל (תרגיל לקורא). קבוצה מצומצמת לא יכולה להכיל אף קבוצה מהרשימה הנ"ל במלואה. לכן בכל תת-קבוצה מצומצמת של A יש לכל היותר 1968 = 44 – 2012 איברים.

<u>הערה</u>: קיימות גם בניות אחרות של 44 קבוצות כנ"ל, למשל, באופן הבא:

44	45	1980
43	46	1978
	...	
2	87	174
1	88	88

ב. נניח, כי נתונה תת-קבוצה מצומצמת B של A בגודל 1968. נסמן את איבריה באמצעות $x_1 < x_2 < ... < x_{1968}$. אז, המספרים $1, 2, ..., x_1 - 1$ אינם ב-B, וגם $x_1 \cdot x_i$ אינו ב-B (אך ב-A) כל עוד $x_1 \cdot x_i \le 2012$. בצורה זו, נמצא מספרים נוספים השייכים ל-A, אך לא ל-B.

קל לראות כי $x_k \le k + 44$, מכיוון שבקטע $[1, 44 + k]$ יש רק 44 מספרים שלמים שלא שייכים ל-B. לכן: $x_1 x_{45-x_1} \le x_1(89 - x_1) \le 44 \cdot 45 = 1980 < 2012$.

לכן המספרים $1, 2, ..., x_1 - 1, x_1 x_1, x_1 x_2, ..., x_1 x_{45-x_1}$ אינם ב-B. זו סדרה עולה, בחלק הראשון של הסדרה $x_1 - 1$ מספרים ובחלק השני של הסדרה $45 - x_1$ מספרים, סה"כ לפחות $(x_1 - 1) + (45 - x_1) = 44$ מספרים השייכים ל-A, אך לא ל-B, ומספיק שנמצא עוד אחד כדי להגיע לסתירה. לשם כך, נתבונן במספר $\alpha = x_1 \cdot x_{46-x_1}$.

לפי אי-שוויון מאותו סוג שכבר ראינו, $x_1 \cdot x_{46-x_1} \le x_1(90 - x_1)$.

אם $x_{46-x_1} < 90 - x_1$, אזי $x_1 \cdot x_{46-x_1} \le x_1(89 - x_1) < 2012$, ולכן α זהו מספר נוסף השייך ל-A, אך לא ל-B.

אחרת, $x_{46-x_1} = 90 - x_1$. לכן נקבל שמתקיים $x_i = i + 44$ לכל $46 - x_1 \le i \le 1968$.

גרף הפונקציה $x(90 - x)$ הוא פרבולה עם קרניים כלפי מטה, וקודקוד ב-$x = 45$, ולכן בתחום $x < 45$ היא עולה. משום כך, אם $x_1 \le 41$, אזי

$x_1(90 - x_1) \le 41 \cdot 49 = 2009 < 2012$, לכן $\alpha = x_1 x_{46-x_1} = x_1(90 - x_1)$ הוא ב-A ואינו ב-B. עם זאת, עבור $42 \le x_1 \le 44$, נקבל כי $x_1^2 = x_{x_1^2 - 44}$, שהרי

$$46 - x_1 < x_1^2 - 44 < 2012 - 44 = 1968,$$

וזוהי סתירה. לכן, $x_1 = 45$. כלומר B היא הקבוצה המתוארת בתחילת סעיף א'.

3. נתון פולינום: $p(x)=x^4-5773x^3-46464x^2-5773x+46$. מצא/י את סכום הארקטנגנסים של כל שורשיו הממשיים.

תשובה. 0.

פתרון. נזכיר נוסחה ידועה: $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.

אם $\alpha=\arctan u,\ \beta=\arctan v$, והמספר $\alpha+\beta$ נמצא בתחום $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, אזי ניתן לרשום את הנוסחא (כאשר לוקחים ארקטנגנס לשני האגפים) בתור

$\arctan u+\arctan v=\arctan\frac{u+v}{1-uv}$.

[לטובת אותם קוראים שלא מכירים את הנוסחה, נראה הוכחה קצרה המשתמשת במספרים מרוכבים. הארגומנטים של מספרים מרוכבים $1+iu,\ 1+iv$ הם $\alpha,\ \beta$, בהתאמה (לפי הגדרת הטנגנס), ולכן הארגומנט של מכפלתם $(1+iu)(1+iv)=(1-uv)+i(u+v)$ הוא $\alpha+\beta$, והטנגנס שלו שווה ליחס בין חלק המדומה לחלק הממשי (לפי הגדרת הטנגנס).]

בעצם, אנחנו רוצים להשתמש בגרסה יותר כללית של הנוסחה: $\tan(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ או באופן שקול $\arctan u+\arctan v+\arctan w+\arctan t$. ניתן לקבל את הנוסחה מנוסחת $\tan(\alpha+\beta)$ על ידי שימוש חוזר, או אולי יותר קל באמצעות מכפלה של 4 מספרים מרוכבים $(1+iu)(1+iv)(1+iw)(1+it)=(1-\sigma_2+\sigma_4)+i(\sigma_1-\sigma_3)$, כאשר $\sigma_1=u+v+w+t,\ \sigma_2=uv+...,\ \sigma_3=uvw+...,\ \sigma_4=uvwt$ הם פולינומי וייטא. מכאן $\arctan u+\arctan v+\arctan w+\arctan t=\arctan\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{1-\sigma_2+\sigma_4}\right)$, בתנאי, שסכום הארקטנגנסים נמצא בתחום $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

ובכן, נתבונן בפולינום $p(x)=x^4-5773x^3-46464x^2-5773x+46$.

קל לראות כי $p(0)>0,\ p(\pm1)<0,\ p(\pm1000000)>0$, לכן יש שורש בכל אחד מהקטעים $(-1000000,-1),\ (-1,0),\ (0,1),\ (1,1000000)$, כי בקצותיהם של קטעים אלה הסימנים הפוכים. אלו הם כל השורשים שיש לפולינום זה, משום שהפולינום הינו מדרגה 4. נסמן את שורשי הפולינום u,v,w,t כאשר $u<v<w<t$.

אז $u\in(-1000000,-1),\ v\in(-1,0),\ w\in(0,1),\ t\in(1,1000000)$ ולכן

$\arctan u\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right),\ \arctan v\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right),\ \arctan w\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right),\ \arctan t\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

לכן $\arctan u+\arctan w\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\ \arctan v+\arctan t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

לכן $\arctan u+\arctan v+\arctan w+\arctan t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, כלומר מותר להשתמש בנוסחה. באמצעות הנוסחא ומשפט וייטא רואים:

$$\arctan u+\arctan v+\arctan w+\arctan t=\arctan\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{...}\right)=\arctan\left(\frac{5773-5773}{...}\right)=$$
$$=\arctan 0=0$$

4. חשב/י את כמות המספרים השלמים החיוביים אשר קטנים מ-1000000, מתחלקים ב-7, וברישומם העשרוני אין שימוש בספרות שאינן 0, 1 או 9.

תשובה. 104.

פתרון. אם היו שואלים על כל המספרים שקטנים מ-1000000, אז היה ברור, מכיוון ש-999999 מתחלק ב-7, שבדיוק שביעית מהמספרים מתחלקים ב-7, ובדיוק שביעית נותנים כל שארית בחלוקה ל-7, מ-1 עד 6 (הרי המספרים באים בשביעות: 1 עד 7, 8 עד 14 וכן הלאה, כאשר בכל שביעייה יש נציג אחד מכל שארית).

אם נוריד את כל המספרים שמסתיימים בספרות 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, אנחנו נוריד שביעיות של מספרים רצופים, שיש ביניהם בדיוק נציג אחד לכל שארית, ולכן גם כמות המספרים שמתחלקים ב-7 תישאר להיות שביעית.

כעת, נוריד את כל המספרים שהספרה השנייה שלהם היא 2, 3, ..., 8. גם מספרים אלה באים בשביעיות: בכל שביעייה, כל הספרות של חבריה שוות בהתאמה, פרט לספרה השנייה מהסוף, שיכולה להיות 2, 3, ..., 8. ההפרשים בין מספרים אלה הם 10, 20, ..., 60, כלומר לא מתחלקים ל-7, ולכן בכל שביעייה יש נציגים רק של שאריות שונות בחלוקה ל-7.

אותו דבר יקרה כאשר נוריד מספרים שהספרה השלישית (או הרביעית, חמישית, שישית) שלהם היא 2, 3, ..., 8. לכן גם בסוף בדיוק שביעית מהמספרים שרשומים בספרות המותרות מתחלקים ב-7.

מותר ליצור מספרים של לא יותר מ-6 ספרות, עם ספרות 1, 0, 9, וזה כמו כל הסדרות באורך 6 מהספרות 1, 0, 9 (אפסים בהתחלה ניתן למחוק), וכמותן היא 3^6 (כולל 0), אבל, מכיוון שבשאלה מדברים על מספרים חיוביים, מותר להרכיב רק
$3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$ מספרים. הגענו למסקנה שבדיוק שביעית מבין המספרים מתחלקים ב-7, ולכן התשובה היא $728 / 7 = 104$.

5. נתונה מערכת צירים קרטזית במישור. נקודה במישור נקראת שלמה, אם שתי הקואורדינטות שלה הן מספרים שלמים. נתון משולש שקודקודיו הם נקודות שלמות ואין על צלעותיו נקודות שלמות נוספות. בתוך משולש זה יש בדיוק 4 נקודות שלמות שונות. האם 4 הנקודות הללו נמצאות בהכרח על ישר אחד?

תשובה. כן.

פתרון. לפי נוסחת פיק, שטח המשולש הינו $4\frac{1}{2}$. ב.ה.כ., הקודקוד הראשון הוא ראשית הצירים O, והקודקוד השני מתאים לווקטור שלם A. תהא V נקודה שלמה שלא נמצאת על הישר של ווקטור OA, אבל הכי קרובה לישר זה. קל לראות (לפי נוסחת פיק, למשל) שהמשולש שנוצר מהווקטורים V, A והראשית הוא בעל שטח $\frac{1}{2}$. לכן ניתן להניח שהקודקוד השלישי B של המשולש הנתון הוא $B = 9V+mA$, כאשר m שלם (כי המרחק מ-B ל-OA גדול פי 9 מהמרחק מ-V ל-OA ; ייתכן גם המקרה $B = -9V+mA$, אבל אז ניתן להחליף V ב-V–, ולכן נניח $B = 9V+mA$ ללא הגבלת הכלליות). לכן שתיים מהצלעות רשומות בתור ווקטורים $9V+mA$, $9V+(m-1)A$, ואף אחת מהן אינה ווקטור המתחלק ב-3, הרי הצלעות לא מכילות נקודות שלמות בין הקודקודים.

לכן המספרים m, $m-1$ אינם מתחלקים ב-3, לכן $m+1$ כן מתחלק ב-3, כלומר מרכז המסה של הקודקודים $M = 3V+\frac{m+1}{3}A = \frac{0+A+(9V+mA)}{3} = \frac{0+A+B}{3}$ הוא נקודה שלמה. שטחו של המשולש, הנוצר ע"י M ועוד שני קודקודים של המשולש המקורי, נגיד MAB, הוא $1\frac{1}{2}$. לכן לפי נוסחת פיק, או שיש נקודה שלמה בתוכו, או שיש שתי נקודות שלמות על צלעותיו. נעבור על שני המקרים:

<u>מקרה 1</u>: נניח, כי יש נקודה שלמה K בתוך MAB ולא על צלעותיו. שטחי המשולשים MAK, ABK, BMK הינם $\frac{1}{2}$, הרי אין הם מכילים נקודות שלמות. לכן K הוא מרכז המסה של ABM. משום כך $W = MK$ הוא $\frac{2}{3}$ מווקטור התיכון MN של המשולש ABM, לכן הוא $\frac{2}{9}$ מווקטור ON של המשולש OAB. לכן W, 2W, 3W, 4W הינן נקודות שלמות פנימיות של משולש OAB. לכן במקרה זה יש 4 נקודות שלמות פנימיות על ישר אחד. מכיוון שבסה"כ יש 4, כולן על ישר אחד.

<u>מקרה 2</u>: יש שתי נקודות שלמות על צלעותיו של משולש MAB. אף אחת מהן אינה על AB, לכן או ששתיהן על MA, או ששתיהן על MB, או שאחת על MA והשנייה על MB. אם P, Q שלמות, P על MA, Q על MB, אזי הן אמצעי הקטעים הנ"ל. במקבילית PMQR גם הנקודה R היא שלמה, אבל היא נקודת האמצע של AB וזה לא יתכן. לכן שתי הנקודות נמצאות על אותה הצלע.
ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות שזוהי צלע MA (אחרת נחליף בין השמות של A ל-B). הנקודות השלמות על הישר MA נמצאות במרחקים שווים מקצוות הקטע, לכן ניתן להגיד שאלה נקודות $A+U$, $A + 2U$, כאשר $A + 3U = M$, לכן $|U|$ הוא שליש מ-$|MA|$, כלומר $\frac{2}{9}$ מהאורך של התיכון מ-A במשולש OAB המקורי. מכאן, ניתן לסיים בדומה למקרה א'.

6. $x_1,\dots,x_n$ הם מספרים ממשיים חיוביים, עבורם מתקיים: $x_1+\dots+x_n=n$.

הוכח\י כי: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\dots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\le\frac{4}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}+n-4$.

פתרון. נוכיח טענה חזקה יותר: לכל תמורה σ של $\{1,2,\dots,n\}$, מתקיים

$$\frac{x_1}{x_{\sigma(1)}}+\frac{x_2}{x_{\sigma(2)}}+\dots+\frac{x_n}{x_{\sigma(n)}}\le\frac{4}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}+n-4.$$

מכיוון שכעת אי-השוויון סימטרי, ניתן להניח ללא הגבלת הכלליות כי $x_1\ge x_2\ge\dots\ge x_n$.
לפי אי-שוויון התמורות, מספיק להוכיח כי

$$\boxed{\frac{x_1}{x_n}+\frac{x_2}{x_{n-1}}+\dots+\frac{x_n}{x_1}\le\frac{4}{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}+n-4}\quad(*)$$

נוכיח את הטענה האחרונה בלי שימוש בתנאי $x_1\ge x_2\ge\dots\ge x_n$.

$$\frac{x_1}{x_n}+2+\frac{x_n}{x_1}+\left(\frac{x_2}{x_{n-1}}+\dots+\frac{x_{n-1}}{x_2}\right)\le\frac{4}{\prod_{i=1}^{n}x_i}+n-2$$

$$\frac{\left(x_1+x_n\right)^2}{x_1x_n}+S\le\frac{4}{\prod_{i=1}^{n}x_i}+n-2$$

כאשר $S=\frac{x_2}{x_{n-1}}+\dots+\frac{x_{n-1}}{x_2}$ אינו תלוי ב- x_1,x_n. נכפיל את שני האגפים ב- x_1x_n

$$\left(x_1+x_n\right)^2+S\cdot x_1x_n\le\frac{4}{\prod_{i=2}^{n-1}x_i}+\left(n-2\right)x_1x_n$$

לפי אי-שוויון הממוצעים, $S\ge n-2$. נניח, כי $x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_1+x_n$ קבועים, בזמן ש- x_1x_n משתנה. שני האגפים ליניאריים ב- x_1x_n, אך המקדם גדול יותר בצד השמאלי, ולכן ההפרש בין האגף השמאלי לימני יהיה מקסימאלי, כאשר x_1x_n מקסימאלי. לכן מספיק להוכיח את (*) כאשר $x_1=x_n$.

באופן דומה, מספיק להוכיח כאשר $x_2=x_{n-1}$, וגם $x_3=x_{n-2}$, וכן הלאה. אבל אם כל התנאים הנ"ל מתקיימים, אזי האגף השמאלי של (*) הוא n ואי-השוויון שמתקבל הוא מסקנה מיידית של אי-שוויון הממוצעים.